

Darstellung antiker Planetenmodelle mit Hilfe von dynamischer Geometrie-Software

Schriftliche Hausarbeit

im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt für
die Sekundarstufen II und I

dem Staatlichen Prüfungsamt für Erste Staatsprüfungen für
Lehrämter an Schulen Duisburg vorgelegt von:

Thorsten Roterling

Universität Duisburg-Essen, Juli 2008

Themensteller: Prof. Dr. Hans Niels Jahnke

Fachbereich Mathematik, Didaktik der Mathematik

Inhaltsverzeichnis

Vorwort.....	3
Geschichte der antiken Astronomie.....	5
Das Astronomieverständnis im Alten Ägypten.....	5
Der Umbruch im antiken Griechenland.....	6
Weltmodelle im antiken Griechenland.....	8
Die Anordnung der Himmelsobjekte.....	9
Die Theorie der Fixsterne.....	11
Die Theorie der Sonne.....	12
Die Theorie der Wandelsterne.....	18
Differenzierung innerer und äußerer Planeten.....	19
Vorbemerkungen zur historischen Quelle.....	21
Zahlenangaben im Almagest.....	21
Elementare sphärische Geometrie im Almagest.....	23
Das ptolemäische Planetenmodell.....	26
Bestimmung der Bahngeschwindigkeit des Saturn.....	26
Das Problem des Epizykelradius des Saturn.....	29
Bestimmung der Bahngeschwindigkeit der Venus.....	31
Bestimmung des Epizykelradius der Venus.....	32
Berechnung mit Hilfe trigonometrischer Funktionen.....	38
Bestimmung mit Hilfe von dynamischer Geometriesoftware.....	40
Animiertes Venusmodell.....	46
Vergleich mit modernen Venusbeobachtungen.....	50
Didaktische Schlussbetrachtungen.....	54
Literaturverzeichnis.....	56
Anhang.....	57
Inhaltsverzeichnis der CD.....	58
Tabelle: Maximale Venuselongationen der letzten 100 Jahre.....	59

Vorwort

Die moderne Astronomie baut heute vor allem auf die physikalischen Naturgesetze auf, während die Mathematik dabei allenfalls als eine Art Hilfswissenschaft dient. Von daher würde man die Beschäftigung mit astronomischen Themen wohl eher intuitiv in den Physikunterricht einordnen. Wenn wir jedoch in der Zeit zurück reisen, treten diese physikalischen Gesetzmäßigkeiten immer mehr in den Hintergrund, da erst Größen wie Isaac Newton oder Galileo Galilei Ende des 16., Anfang des 17. Jahrhunderts der modernen Physik und damit fast im gleichem Atemzug der modernen Astronomie ihren Weg bereiteten. Trotzdem verspürten auch schon die Menschen der Antike das Bedürfnis den Lauf der Sterne zu erklären. Folgerichtig konnten diese Modelle jedoch nicht auf physikalischen Gesetzen aufbauen.

Während die Modelle der Frühantike vor allem mythologischer Natur waren, versuchten die Gelehrten im antiken Griechenland in der Blütezeit der frühen Mathematik, insbesondere der Geometrie, die Welt mathematisch erfahrbar zu machen. Im einleitenden Teil zur Geschichte der antiken Astronomie möchte ich aufzeigen, wieso gerade die griechische Astronomie als Ausgangspunkt für eine Thematisierung im Rahmen des Mathematikunterrichts geeignet erscheint. Als Referenzwerk für diese Arbeit diente mir Ptolemäus „Almagest“, weil es eines der wenigen Werke ist, die bis heute vollständig erhalten geblieben sind, und weil es sich wie eine Zusammenfassung der Errungenschaften der griechischen Astronomie liest. Aufgrund dieser fundamentalen Bedeutung hat Karl Manitius Anfang des letzten Jahrhunderts eine deutschsprachige Übersetzung des griechischen Originaltextes angefertigt, auf die ich für meine Arbeit in Ermangelung von Griechisch-Kenntnissen zurückgreifen konnte.

Da die Planetenmodelle die komplexesten aller Modelle der damals bekannten Himmelsobjekte darstellen und dem heutigen Kenntnisstand nach von Ptolemäus zum ersten Mal in dieser Vollständigkeit konstruiert wurden, gelange ich in den folgenden Kapiteln schrittweise über die einfachen Modelle der Sonne hin zu den

Planetenmodellen. Diese Vorschritte zeigen auch eine didaktisch sinnvolle Hinleitung für Schülerinnen und Schüler zum Themengebiet auf und enthalten selbst bereits interessante Modelle, die der näheren Untersuchung würdig sind. Da das Hauptaugenmerk dieser Arbeit jedoch auf den Planetenmodellen liegt, will ich diese Vorschritte nicht in aller Ausführlichkeit behandeln, sondern vielmehr deren Hauptaspekte skizzieren.

Für die ausführliche Konstruktion eines Planetenmodells habe ich mir schließlich Ptolemäus Venusmodell ausgewählt. Zuvor möchte ich jedoch darstellen, wieso mir gerade das Venusmodell für den Einsatz von dynamischer Geometriesoftware interessant erschien, indem ich beispielhaft für die Planeten jenseits der Erde die Grundideen und Probleme im Saturnmodell für eine geeignete Umsetzung aufzeige.

Bei den Ausführungen zum Venusmodell möchte ich einerseits die Verfahren aufzeigen, die Ptolemäus für die Konstruktion des Modells verwendet hat und die von Schülern und Schülerinnen der Jahrgangsstufe 10 nachvollzogen werden können, andererseits, wie das Thema mit Hilfe von dynamischer Geometriesoftware auch für die Jahrgangsstufen 7 oder 8 anschaulich aufbereitet werden kann.

Als dynamische Geometriesoftware habe ich für diese Arbeit das von Roland Mechling erstellte und vertriebene Programm Euklid DynaGeo in Version 3.0f verwendet. DynaGeo bietet insbesondere für Schulen (inklusive deren Schülerinnen und Schülern) ein attraktives Lizenzierungsmodell und zeichnet sich durch eine intuitiv zu bedienende Oberfläche aus, für die selbst Schüler und Schülerinnen der Unterstufe erfahrungsgemäß nur eine kurze Einarbeitungszeit benötigen. Gleichzeitig bietet es jedoch bis in die Oberstufe hinein alle relevanten geometrischen Funktionen an. Durch diese Eigenschaften zählt DynaGeo wohl neben Capri Géomètre zu der in deutschen Schulen am häufigsten anzutreffenden dynamischen Geometriesoftware.

Alle in den folgenden Kapiteln konstruierten Modelle befinden sich als DynaGeo-Dateien auf der im Anhang beigefügten CD. Zwar können die statischen Abbildungen in dieser Arbeit einen ersten Eindruck der Modelle vermitteln, doch sie sind nicht in der Lage, die eigentlichen Vorteile von dynamischer Geometriesoftware, nämlich die beliebige Manipulation der Modelle, zu transportieren. Geeigneterweise sollten daher die Konstruktionen begleitend anhand der jeweils an entsprechender Stelle ausgewiesenen DynaGeo-Modelle nachvollzogen werden.

Geschichte der antiken Astronomie

Bevor ich näher auf die ptolemäische Astronomie eingehe, die den Hauptteil dieser Arbeit bilden soll, möchte ich einen kurzen Überblick über die Entwicklung der Astronomie in der Antike geben. Damit möchte ich herausstellen, wieso gerade die griechische Astronomie interessanten Stoff für den Mathematikunterricht liefern kann und wieso von den mannigfaltigen griechischen, astronomischen Werken ich mir Ptolemäus „Almagest“ als Quelle ausgewählt habe.

Das Astronomieverständnis im Alten Ägypten

Es ist zwar zu vermuten, dass sich der Mensch seit seiner Existenz mit den Sternen befasst hatte, doch die erste Blütezeit erlebte die Astronomie in der Hochkultur des Alten Ägyptens. Die Theorie eines umfassenden Weltmodells und der praktische Nutzen aus astronomischen Beobachtungen waren hier jedoch noch strikt voneinander getrennt. Astronomische Beobachtungen waren zu jener Zeit eine vergleichsweise genaue Möglichkeit, um lebensnotwendige Voraussagen treffen zu können. So konnten damalige Astronomen unter anderem das für das ägyptische Volk so existenziell bedeutsame Eintreffen der nächsten Nilflut anhand astronomischer Beobachtungen vorhersagen. Dabei bedienten sie sich keiner umfassender Modelle, sondern sammelten lediglich ihre Beobachtungen, um später durch Extrapolation der Positionen der Himmelsobjekte und Verknüpfung mit irdischen Ereignissen das nächste Eintreffen des jeweiligen Ereignisses vorhersagen zu können. Die Astronomie des Alten Ägyptens hatte somit zwar empirische Charakteristika, aber die gesammelten Daten dienten nur dem direktem Nutzen und nicht etwa, um damit ein theoretisches Weltmodell zu überprüfen.

Das heißt allerdings nicht, dass nicht auch die Alten Ägypter eine Vorstellung der Vorgänge im Universum gehabt hätten. Doch diese waren vor allem mythologisch geprägt. So entstand die Welt laut der Sage aus einem riesigen Ozean namens Nun, aus dem einst der Sonnengott Re emporstieg. Die Bewegung der Sonne erklärte sich bspw. daraus, dass sie zusammen mit Re in einem Boot am Himmelszelt

vorüberziehe, damit ihr Feuer nicht die Erde verbrenne. Abends tauche Re schließlich in die Unterwelt ab, um ihr am folgenden Morgen wieder zu entkommen. Auch die Bewegung der anderen Himmelsobjekte beruhte auf solch mythischen Anschauungen. Zwar mag man aus diesen Geschichten Ansätze physikalischer Zusammenhänge herausdeuten, doch von einem wissenschaftlichem Modell waren die Alten Ägypter noch weit entfernt.

Mythologische Weltmodelle auf der einen Seite und die Vorausberechnung von periodischen Ereignissen aufgrund langer Beobachtungsreihen auf der anderen Seite bestimmten über viele tausend Jahre das Bild der frühen Astronomie, so zu finden bei den Sumerern und schließlich auch bei den Babyloniern, deren hervorragende mathematische Fähigkeiten zur Vollendung dieser astronomischen Vorgehensweise beitrugen.

Der Umbruch im antiken Griechenland

Erst im antiken Griechenland wandelte sich allmählich das Verständnis der Astronomie. Während zu Zeiten Homers auch der griechische Kulturbereich von mythologischen Weltmodellen geprägt war, begannen erstmals ionische Philosophen etwa im 6. Jahrhundert v. Chr. Weltmodelle aufgrund von natürlichen, logischen Überlegungen zu konstruieren. Besonders seien hier Thales von Milet und sein Schüler Anaximander erwähnt, deren Erkenntnisse jedoch nur in Sekundärliteratur überliefert sind. Von Anaximander ist bekannt, dass er entgegen der Ansichten früherer Hochkulturen, nach denen die Erde eine Scheibe unter einem halbkugelartigen Himmelsgewölbe sei, die Erde als Mittelpunkt eines kugelförmigen Universums postulierte; eine Ansicht, die von den meisten nachfolgenden griechischen Gelehrten übernommen wurde.

In der Anfangszeit der griechischen Astronomie fehlte es jedoch an technischen und mathematischen Möglichkeiten, die grob umrissenen Weltmodelle auch zu überprüfen und zu verfeinern. Insbesondere von den Babyloniern gelangte jedoch in der Folgezeit neben großen Sammlungen astronomischer Beobachtungen, technisches und mathematisches Wissen nach Griechenland, woraufhin immer komplexere und genauere Modelle entstanden.

Den Höhepunkt dieser Entwicklung stellt das um 145 n. Chr. entstandene Werk „Mathematike Syntaxis“ (etwa „Mathematische Zusammenstellung“) des hellenistischen Gelehrten Claudius Ptolemäus dar, das heute vor allem unter dem

vom späteren arabischen Titel abgeleiteten Namen „Almagest“ bekannt ist. Es liefert das nach heutigem Kenntnisstand umfassendste antike Modell für die Bewegungen von Sonne, Mond, Sternen und Planeten und kann daher als eine Art Zusammenfassung der antiken, griechischen Astronomie angesehen werden. Das Werk wurde deswegen bis weit über das Mittelalter hinaus als astronomische Standardliteratur angesehen. Erst im 17. Jahrhundert löste das Weltmodell Johannes Keplers allmählich das ptolemäische Weltmodell ab.

Weltmodelle im antiken Griechenland

Den griechischen Astronomen standen eine Fülle von Beobachtungen der Himmelsobjekte zur Verfügung, die insbesondere von den Babyloniern überliefert worden waren. Diese Beobachtungen umfassten die Sonne und den Mond, die fünf damals bekannten Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn und zahlreiche Sterne. Während Sonne und Mond mit bloßem Auge als kreisförmige oder sogar als kugelförmige Gebilde auszumachen sind, lassen sich Planeten und Sterne derart nicht differenzieren, sondern waren mit damaligen Hilfsmitteln allesamt nur als leuchtende Punkte zu erkennen. Daher wurden beide Himmelsobjekte zunächst als Sterne bezeichnet, weshalb ich auch in dieser Arbeit nachfolgend den historischen Begrifflichkeiten folgend mit „Sternen“ beide Arten bezeichnen werde. Während die „echten“ Sterne jedoch am Nachthimmel in ewig gleicher Anordnung vorbeiziehen¹ und daher auch in Abgrenzung als „Fixsterne“ bezeichnet werden, verändern die Planeten ihre Positionen scheinbar völlig unabhängig voneinander. Man sprach daher damals von sog. „Wandelsternen“.

Um zu einem umfassenden Weltmodell zu gelangen, mussten verschiedene zentrale Fragen geklärt werden, die sich im Laufe der Zeit und damit schon weit vor Ptolemäus aus Beobachtungen der Himmelsobjekte ergeben hatten. Diese zogen insbesondere folgende Fragestellungen nach sich:

- Wie sind die Himmelsobjekte und die Erde im Universum angeordnet?
- Wieso ziehen die Fixsterne am Nachthimmel mit konstanter Geschwindigkeit vorbei?
- Wieso hat die Geschwindigkeit der Sonne (und ebenso der Wandelsterne) dagegen leichte Änderungen in ihrem Lauf, was sich zum Beispiel in Form von unterschiedlich langen Jahreszeiten zeigt?

¹ Korrekterweise muss erwähnt werden, dass sich die Anordnung im Laufe von vielen tausend Jahren tatsächlich minimal verändert. Die Veränderungen sind aber so gering, dass sie selbst über mehrere Menschengenerationen hinweg keinen wesentlichen Einfluss auf derartige Modelle haben.

- Warum vollführen einige Planeten vor dem Fixsternhimmel, d.h. wenn man den Fixsternhimmel als feststehende Sphäre betrachtet, zeitweise sogar eine Rückwärtsbewegung resp. eine Schleifenbahn? (siehe Abbildung 6 auf Seite 18)

Die Anordnung der Himmelsobjekte

Die Frage nach der korrekten Anordnung der Himmelsobjekte, insbesondere welches Objekt als Zentralkörper angenommen werden soll, erscheint aus heutiger Sicht vor dem Hintergrund der Querelen zwischen Wissenschaft und Kirche im 17. Jahrhundert um das einzig „wahre“ Weltmodell², als eine der grundlegenden Fragen überhaupt. Von daher mag es beinahe rückständig und dumm klingen, wenn die überwiegende Zahl der griechischen Gelehrten die Erde in den Mittelpunkt des Universums legte, was als geozentrisches Weltmodell resp. Weltbild in der Literatur zu finden ist. In Wahrheit ist die konkrete Anordnung für ein funktionierendes Weltmodell jedoch in weiten Teilen beliebig, solange die relativen Zusammenhänge nicht verletzt werden. Das mag man auch im Hinblick auf die schulische Vermittlung an einem kleinen Experiment näher ausmachen:

Benötigt werden dazu zwei Personen. Person A erhält den Auftrag Person B zu beobachten. Dabei soll auch darauf geachtet werden, wie sich Person A drehen muss, um Person B sehen zu können und wie sich der Hintergrund hinter Person B verändert. Im ersten Teil wird nun Person B in einem Kreis links herum um Person A laufen. Person A muss sich daher langsam nach links drehen, um Person B stets beobachten zu können. Der Hintergrund des Raumes scheint sich hinter Person B nach rechts wegzubewegen. Nun verbleibt Person B an einem bestimmten Punkt und Person A läuft im Kreis rechts herum um Person B. Auch hier muss Person A wieder allmählich ihren Kopf nach links drehen, um Person B stets beobachten zu können. Ebenso scheint sich wieder der Hintergrund hinter Person B nach rechts wegzubewegen.

Mit diesem kleinen Experiment soll deutlich werden, dass in beiden Fällen die gleichen Beobachtungen angestellt werden, egal, ob sich nun Person B um Person A dreht oder anders herum. Das einzige Indiz für die tatsächliche Bewegung ist die Eigenerfahrung des Laufens oder eben Stehens von Person A. Da man also über Beobachtungen alleine nicht in der Lage ist, eine Aussage über die tatsächliche Anordnung zu treffen, kann man nur mittels Indizien für die eine oder andere

² vgl. bspw. Querelen rund um Galileis Werk „Dialogo“

Anordnung der Himmelsobjekte argumentieren. Weil man auf der Erde nichts von einer Eigenbewegung spürt, liegt es eigentlich nahe, die Erde als die „stehende Person“ anzunehmen. Dies wäre bereits ein erstes Indiz für die zentrale Position der Erde.

Ein weiteres Argument, welches Ptolemäus für das geozentrische Weltmodell anführt, ist die Tatsache, dass sich ein fallen gelassenes Objekt an jedem Punkt der Erde stets senkrecht nach unten bewegt. Wenn man die Erde als Kugel annimmt, wie es die meisten griechischen Gelehrten zu dieser Zeit bereits taten, gewinnt man daraus die Schlussfolgerung, dass alles zum Mittelpunkt der Erde hinstrebt. Er hält es daher für logisch, den Mittelpunkt der Erde auch als Mittelpunkt des Universums zu definieren. Dass Sonne, Mond und Sterne nicht auf die Erde herunterfallen, erklärt er mit ihrer besonderen Beschaffenheit³. Zuletzt soll auch ein sehr praktikabler Grund für das geozentrische Weltmodell nicht unerwähnt bleiben: es scheint nur natürlich den Mittelpunkt des Modells an seinen eigenen Standpunkt zu legen, solange es keinen triftigen Grund gibt, etwas anderes anzunehmen.

Das soll nicht heißen, dass sich die griechischen Gelehrten bei der Wahl des Zentralkörpers einig waren. So vertrat Aristarch von Samos die Ansicht, die Sonne müsse sich im Mittelpunkt des Universums befinden, da er so die Beobachtungen der Venus- und Merkurbahn eleganter erklären konnte. Herakleides Pontikus wird wiederum nachgesagt, dass er ein Modell entwickelte, nach dem die Erde zwar im Mittelpunkt stünde, Venus und Merkur in Ausnahme aber nicht direkt die Erde, sondern die Sonne (etwa aus heutiger Sicht wie Monde) umkreisen würden – sozusagen ein geozentrisches Modell mit heliozentrischen Einflüssen.

Auch bei der Anordnung der übrigen Himmelsobjekte konnte man sich nicht auf aus Beobachtungen abgeleitete Erkenntnisse berufen, sondern konnte lediglich Spekulationen anstellen. Ptolemäus ordnet die Himmelsobjekte ausgehend vom Zentralkörper Erde nacheinander in Form von Mond, Merkur, Venus, Sonne, Mars, Jupiter, Saturn und schließlich Fixsternsphäre an und trifft damit erstaunlicherweise ihre tatsächliche (relative) Anordnung bis auf eine Vertauschung von Merkur und Venus. Ptolemäus begründet die von ihm getroffene Anordnung nicht, sondern verweist auf die einhellige Meinung früherer Astronomen.

Da der Mond am Nachthimmel jedoch das scheinbar größte Objekt ist, ist es nachvollziehbar, den Mond in direkte Nachbarschaft zur Erde zu setzen. Die Sonne

³ Laut Ptolemäus bestehen die Himmelsobjekte nicht aus den irdischen vier Elementen Wasser, Erde, Luft und Feuer, sondern aus der Quintessenz, also einem fünften Element.

wiederum erlangt eine differenzierende Aufgabe, indem sie die Planeten in zwei Gruppen teilt. Merkur und Venus bilden die Gruppe der inneren Planeten, Mars, Jupiter und Saturn die Gruppe der äußeren Planeten. Diese Kategorisierung erscheint vor dem Hintergrund deutlich unterschiedlicher Beobachtungen in der Bewegung der Planeten, die ich später näher ausführen möchte, sinnvoll. Die weitere Detailanordnung der Planeten scheint dagegen nur reine Spekulation, wie auch die Frage darüber, welche Indizien für die Anordnung letztlich ausschlaggebend waren. Es mag sein, dass man die zur Fixsternsphäre abnehmende Bahngeschwindigkeit der Planeten in Erwägung zog.

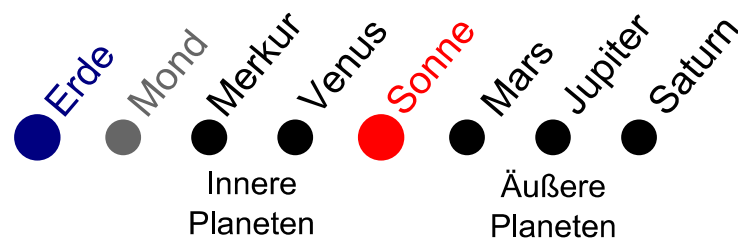


Abbildung 1 - Planetenanordnung nach Ptolemäus mit der Erde als feststehender Zentralkörper

Auch wenn Ptolemäus der Vollständigkeit halber die Frage der Anordnung der Himmelsobjekte vorweg diskutiert, so ist deren konkrete Anordnung für die nachfolgenden Modelle eher von geringer Relevanz. Einzig die Relationen der Himmelsobjekte untereinander sind von Wichtigkeit.

Die Theorie der Fixsterne

Abgesehen von den Wandelsternen, also nach heutigem Verständnis den Planeten, ziehen alle Sterne mit konstanter Geschwindigkeit und mit ewig gleichen Abständen voneinander am Nachthimmel vorbei. Ein Umstand, der schon weit vor Ptolemäus bekannt war, weswegen die Fixsterne unter anderem als verlässliche Navigationshilfe dienten und markanten Anordnungen Sternbilder einbeschrieben wurden. Ptolemäus erbringt zu Anfang des VII. Buchs des Almagest sogar einen ausführlichen Nachweis über diese konstanten Eigenschaften der Fixsterne und überliefert den größten Sternenkatalog aus antiker Zeit.

Aus heutiger Sicht lässt sich die Eigenschaft der konstanten Bahngeschwindigkeit der Fixsterne mit der konstanten⁴, täglichen Erdrotation erklären, die scheinbare Unveränderlichkeit ihrer Abstände untereinander dagegen mit der extrem großen Distanz zwischen Erde und Sternen, sodass die tatsächliche Eigenbewegung der Sterne mit damaligen Mitteln selbst über hunderte von Jahren nicht messbar war. Da die Mehrheit der griechischen Gelehrten, wie im vorigen Abschnitt ausgeführt, nicht von einer Eigenbewegung der Erde ausging, da dies in keinsten Weise spürbar war, postulierte Ptolemäus in einhelliger Meinung mit früheren Gelehrten, dass sich die Fixsterne wie „festgeklebt“ auf der äußeren Sphäre des Universums befinden würden, die sich selbst wiederum mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer als Ekliptik benannten, gedachten, kreisförmigen Linie bewegt.

Auch alle anderen Himmelsobjekte bewegen sich zumindest sehr nahe dieser Ekliptik, weshalb Ptolemäus primär die Bewegung der Objekte in Richtung der Ekliptik untersucht und sich so auf ein wesentlich einfacheres, zweidimensionales Modell beschränken kann.

Die Theorie der Sonne

Allen antiken Modellen, egal ob sie nun die Erde oder die Sonne als Zentralkörper annahmen, war gemeinsam, dass sie von einer exakten Kreisbahn ausgingen, auf der sich das jeweilige Himmelsobjekt bewegt. Dies war sowohl ideologischer als auch praktischer Natur. Der Kreis ist die perfekte, ebene Figur. Da die Himmelsobjekte überirdisch und somit göttlicher Natur seien, musste angenommen werden, dass sich in ihren Bahnen diese Perfektion widerspiegelt. Andererseits waren Kurven, die von der Kreisbahn abwichen, zu damaliger Zeit mathematisch kaum handhabbar. Mit dieser unanfechtbaren Grundvoraussetzung lässt sich aber in keinem Modell die unterschiedliche Bahngeschwindigkeit der Himmelsobjekte erklären.

Schon vor Ptolemäus wurden zwei verschiedene Modelle entwickelt, mit denen sich diese Anomalie erklären ließe. Hipparchos von Nicäa postulierte ein Modell, nachdem sich die Erde nicht im exaktem Mittelpunkt der Himmelskörperbahnen befindet, sondern leicht versetzt dazu (siehe Abbildung 2). Durch den unterschiedlichen Abstand, der sich nun zwischen Erde und Himmelskörper ergibt, je nachdem wo sich der Himmelskörper gerade auf seiner Bahn befindet, ergeben

⁴ Exakterweise muss angeführt werden, dass die Erdrotationsgeschwindigkeit leicht schwankt, als sich auch allmählich verlangsamt. Diese Prozesse sind jedoch so geringfügig (ca. 2 ms) bzw. so langsam voranschreitend (ca. 6 μ s pro Jahrtausend), dass sie für antike Verhältnisse nicht auszumachen waren und daher für diese Betrachtung irrelevant sind.

sich bei gleichbleibender Bahngeschwindigkeit unterschiedliche Winkelgeschwindigkeiten, wodurch sich der Himmelskörper in Erdnähe scheinbar schneller bewegt, als in Erdferne. Dieses Modell ist heute als Exzentertheorie bekannt und der Abstand zwischen Mittelpunkt der Umlaufbahn und tatsächlicher Position der Erde als Exzentrizität.

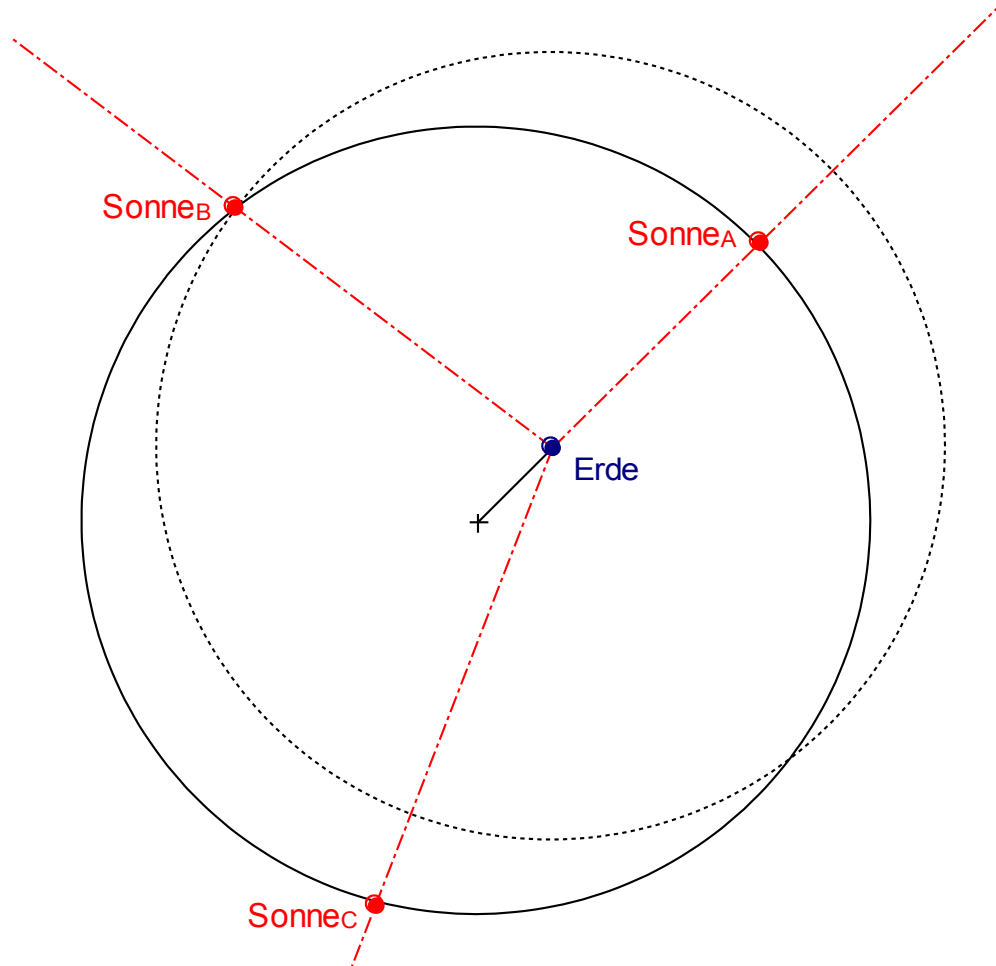


Abbildung 2: Schema des Exzentermodells nach Hipparchos mit verschiedenen Sonnenpositionen (siehe CD: Exzentermodell.geo)

Das Gegenmodell dazu findet sich zuerst bei Apollonios von Perge. Dieser ging davon aus, dass sich der jeweilige Himmelskörper nicht direkt auf seiner eigentlichen Umlaufbahn um die Erde bewegt, sondern auf einer Epizykel genannten, sekundären Kreisbahn. Das Zentrum des Epizykels wiederum bewegt sich dann mit konstanter

Geschwindigkeit auf der eigentlichen Umlaufbahn, die in diesem Modell als Deferent bezeichnet wird (siehe Abbildung 3).

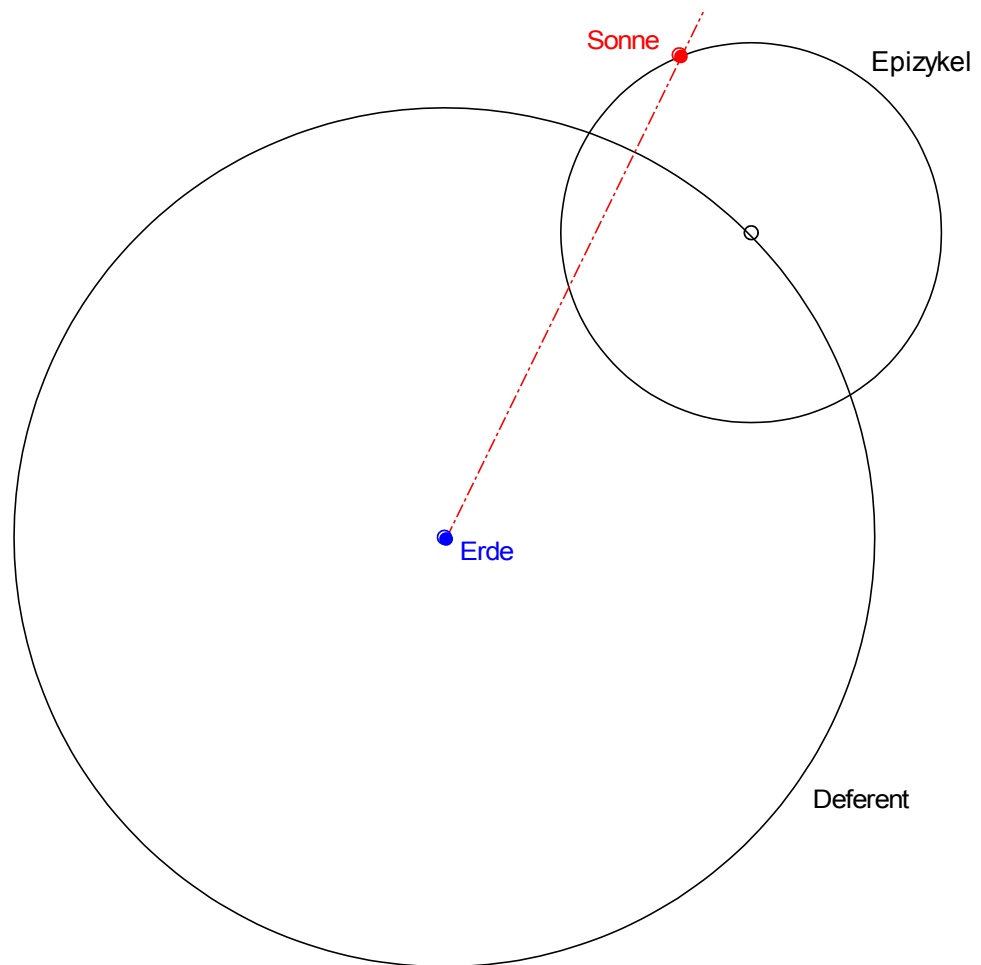


Abbildung 3: Schema des Epizykelmodells nach Apollonios (siehe CD: Epizykelmodell.geo)

In der Phase, in der die Bewegungen des Epizykels auf dem Deferenten und des Himmelskörpers auf dem Epizykel in gleiche Richtung verlaufen, summieren sich diese auf, wodurch das Himmelsobjekt eine scheinbar größere Geschwindigkeit annimmt, während eine Bewegung in entgegengesetzte Richtung die Differenz der Geschwindigkeiten und somit eine scheinbare Verlangsamung zur Folge hat. Ist die Geschwindigkeit des Himmelskörpers auf dem Epizykel größer als die des Epizykels auf dem Deferenten, so geht das Himmelsobjekt nach diesem Modell sogar in eine kurzzeitige Rückwärtsbewegung über. Typischerweise erhält man durch diese

Voraussetzungen in der Aufsicht eine Schleifenbahn des Himmelsobjekts, wie sie in Abbildung 4 auf Seite 16 dargestellt ist.

Mit beiden Modellen ließ sich die Anomalie in der Bahngeschwindigkeit der Sonne sinnvoll erklären. Während beide Modelle schon vor Ptolemäus in weiten Zügen ausgereift waren und es Anhängerschaften sowohl für das eine als auch das andere Modell gab, so findet sich bei ihm vermutlich zum ersten Mal der Versuch, beide Modelle miteinander in Einklang zu bringen und Parameter zu bestimmen, unter denen beide Modelle von der Erde aus betrachtet das Himmelsobjekt die gleiche Bahn beschreiben lassen.

Ich möchte diese Äquivalenz mit Hilfe von dynamischer Geometriesoftware veranschaulichen, indem ich mit dem Epizykelmodell starte und durch geeignete Wahl der Parameter eine Bahn erzeuge, wie sie das Exzentermodell hervorbringen würde. Zunächst stelle man zwei elementare Annahmen auf:

1. Der Radius der Umlaufbahn ist im Epizykelmodell und im Exzentermodell gleich. Dies erscheint sinnvoll, weil sich durch die Kreisform des Epizykels etwaige Abweichungen von der mittleren Umlaufbahn nach einer vollen Rotation zu 0 addieren.
2. Der Radius des Epizykels im Epizykelmodell ist gleich dem Abstand von Erde und Mittelpunkt der Umlaufbahn im Exzentermodell. In beiden Modellen ist dies der Spielraum, den das Himmelsobjekt maximal von seiner mittleren Umlaufbahn abweichen kann.

Durch diese Annahmen können wir ohne Änderung des Konstruktionsaufbaus ein Epizykelmodell in ein Exzentermodell überführen. In der Datei „Modelläquivalenz.geo“ ist ein fertig animierbares Epizykelmodell einschließlich des Bahnverlaufs des dargestellten Himmelsobjekts gegeben. Da im Zusammenhang mit den Planetenbahnen später in dieser Arbeit eine ausführliche Beschreibung der Konstruktion und Animation des Epizykelmodells erfolgt, gehe ich an dieser Stelle nicht weiter auf den Aufbau ein. Während das Exzentermodell bereits über die zwei Parameter „Radius der Umlaufbahn“ und „Abstand Erde – Mittelpunkt der Umlaufbahn“ bis auf die Orientierung eindeutig festgelegt ist, ist für das Epizykelmodell noch die Relation der Bahngeschwindigkeiten auf Epizykel und Deferenten entscheidend. Diese Relation kann durch den in der Beispielkonstruktion oben links angegebenen Term manipuliert werden, wobei s die Bahngeschwindigkeit des Epizykels auf dem Deferenten ist (siehe Abbildungen 4 und 5). Durch geeignetes

Ausprobieren kann nun ermittelt werden, dass sich das Exzentermodell genau dann aus dem Epizykelmodell ergibt, wenn man als Koeffizienten 1 wählt.

Durch die Äquivalenz der beiden Modell steht es Ptolemäus daher frei, sich für eines der beiden zu entscheiden, da sie die Bahn der Sonne gleichwertig erklären können. Er gibt dabei dem Epizykelmodell den Vorrang, da es für ihn wenig sinnvoll scheint, auf der einen Seite zu postulieren, die Erde würde im Mittelpunkt des Universums stehen (vgl. auch seine Theorie, dass alles zum Mittelpunkt der Erde hinstrebt), auf der anderen Seite aber ein Modell zu wählen, nachdem die Erde verschoben zum exaktem Mittelpunkt wäre.

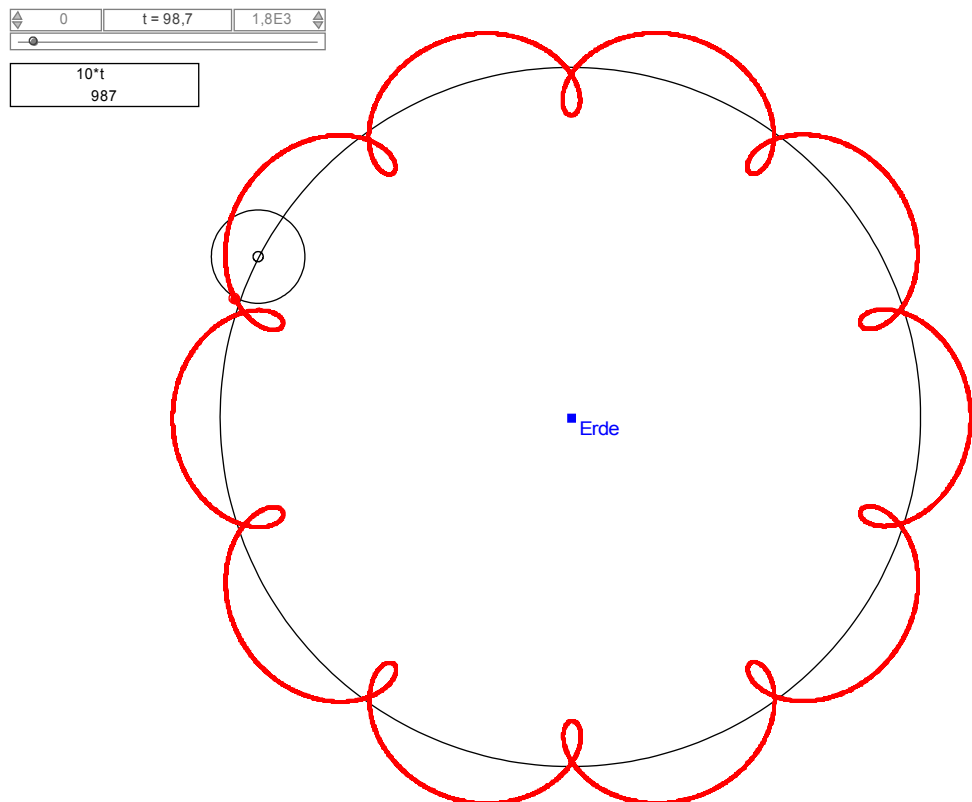


Abbildung 4: Durch Wahl geeigneter Parameter kann ein Epizykelmodell ...

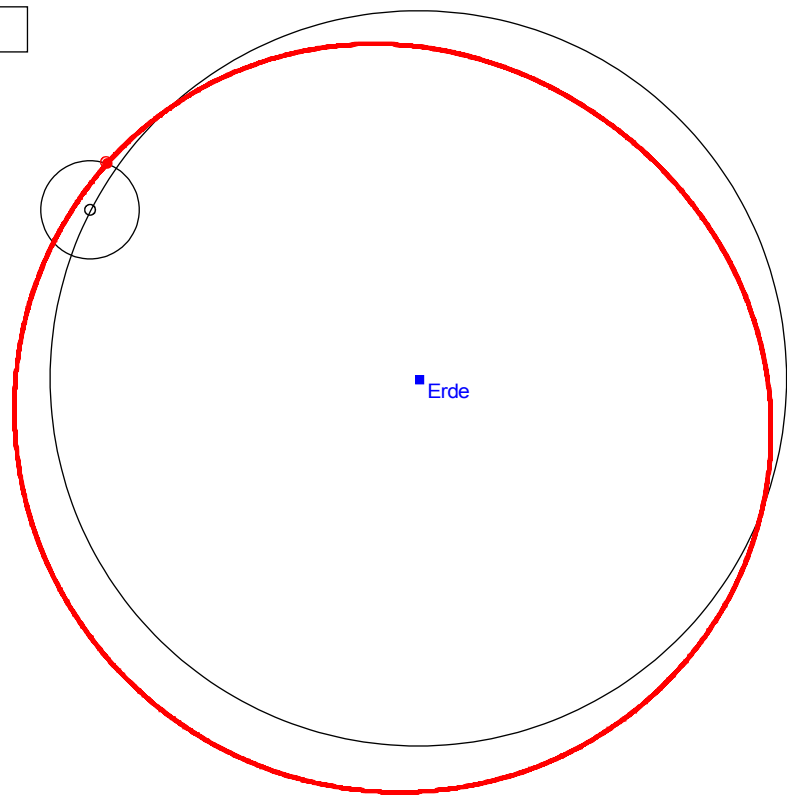
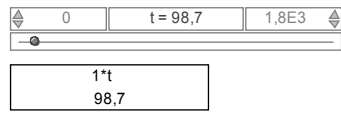


Abbildung 5: ... in ein Exzentermodell überführt werden.

Die Theorie der Wandelsterne

Während Ptolemäus sich im *Almagest* bei den vorigen Theorien größtenteils auf seine Vorgänger beruft und allenfalls eine Aufbereitung dieser unternimmt⁵, betritt er mit einer umfassenden Theorie für die Wandelsterne (also nach heutigem Verständnis die Planeten) ein völlig neues Gebiet. Die Schwierigkeit für ein geeignetes Planetenmodell liegt darin, dass es im Gegensatz zur Sonne zwei Anomalien gibt⁶. Zum einen zeigen sich auch bei den Planeten Änderungen ihrer Bahngeschwindigkeit, zum anderen vollführen einige der Planeten vor dem Hintergrund des Fixsternhimmels zeitweise sogar eine Rückwärtsbewegung (siehe Abbildung 6). Keines der beiden Modelle für die Sonne kann jedoch beide Anomalien gleichzeitig erklären.

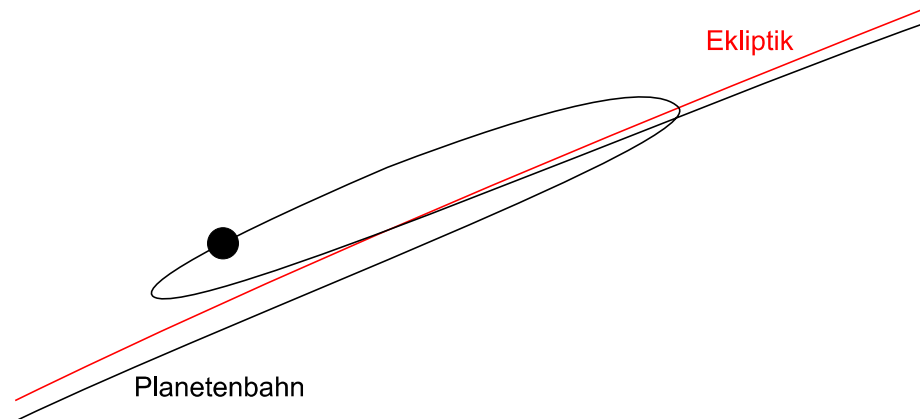


Abbildung 6: Schema einer Planetenschleife vor dem Hintergrund des Fixsternhimmels. Da Ptolemäus die vertikale Abweichung von der Ekliptik zunächst außen vor lässt, reduziert sich das Modell auf die Rückwärtsbewegung während dieser Phase.

Ptolemäus löst dieses Problem, indem er beide Modelle in seinem Planetenmodell miteinander kombiniert. Da das Exzentermodell aufgrund seiner konstanten Rotationsrichtung jedoch nicht die Rückwärtsbewegung erklären kann, kommt zwingenderweise das Epizykelmodell für diesen Zweck zum Einsatz, während das Exzentermodell somit für die Erklärung der schwankenden Bahngeschwindigkeit

5 Insbesondere sei hier auf Hipparchos verwiesen, von dessen heute leider nicht mehr erhaltenen Werken Ptolemäus laut eigenen Aussagen viele Theorien übernahm, andere verfeinerte.

6 Prinzipiell muss sogar vor drei Anomalien gesprochen werden, wenn man auch die vertikale Abweichung von der Ekliptik berücksichtigt. Um bei einem zweidimensionalen Modell zu bleiben, lässt Ptolemäus diese jedoch außen vor.

verbleibt. Als Randbemerkung sei erwähnt, dass Ptolemäus sich durch den Einsatz des Exzentermodells für sein Planetenmodell in gewisser Weise selbst widerspricht, da er das Exzentermodell im Zusammenhang mit der Sonne zunächst für ungeeignet hielt. Hier scheint es ihm als Möglichkeit für ein geeignetes Planetenmodell gerade Recht zu sein.

Differenzierung innerer und äußerer Planeten

Wie eingangs erwähnt, wählte Ptolemäus die Anordnung der Sonne eben so, dass sie die Planeten in zwei Gruppen unterteilt, die sich aus unterschiedlichen Beobachtungen ergeben. Während die äußeren Planeten Mars, Jupiter und Saturn zu jeder Zeit am Nachthimmel auftauchen können, sind Venus und Merkur ausschließlich kurz nach Sonnenuntergang oder kurz vor Sonnenaufgang zu beobachten.

Dieser aus antiker Sicht hinzunehmende Umstand, den Ptolemäus nicht erklären konnte, lässt sich durch das heutige Modell anschaulich darstellen. In Abbildung 7 ist die Sonne, die Erde und jeweils ein Repräsentant der inneren und äußeren Planeten dargestellt. Da die Eigenbewegung der Erde für diese Veranschaulichung keine Rolle spielt, belassen wir die Erde der Einfachheit halber unbewegt und beobachten von dieser Fixposition aus den jeweiligen Planeten auf seiner Umlaufbahn. Diese Beobachtung wird durch den Beobachtungsstrahl verdeutlicht.

Betrachten wir zunächst den äußeren Planeten auf seiner Umlaufbahn, so fällt auf, dass der Beobachtungsstrahl einen vollständigen Kreis beschreibt oder anders gesagt jeden Winkel annehmen kann. Daraus folgt, dass ein äußerer Planet theoretisch zu jeder Tageszeit beobachtet werden könnte. Befindet er sich von der Erde aus gesehen in der Nähe der Sonne, so zieht er tagsüber am Himmel vorüber, befindet er sich dagegen auf der sonnen-abgewandten Seite, so sehen wir den Planeten am Nachthimmel. Steht der Planet genau auf einer Linie mit Erde und Sonne – mit der Erde inmitten der beiden anderen Himmelskörper – so kann der äußere Planet genau um Mitternacht an einem Längengrad der Erde am höchsten Punkt der Ekliptik beobachtet werden. Der Astronom spricht bei dieser speziellen Stellung von einer Opposition.

Wenn wir dagegen dem inneren Planeten auf seiner Umlaufbahn folgen, so tritt eine solche Opposition nie ein. Der Beobachtungsstrahl schwankt lediglich um einige Grad zur Beobachtungsrichtung der Sonne. Daher ziehen die inneren Planeten nur

tagsüber am Himmel vorbei und aufgrund ihrer im Verhältnis zur Sonne verschwindend geringen Leuchtstärke, können wir sie allenfalls kurz vor Sonnenaufgang oder kurz nach Sonnenuntergang beobachten.

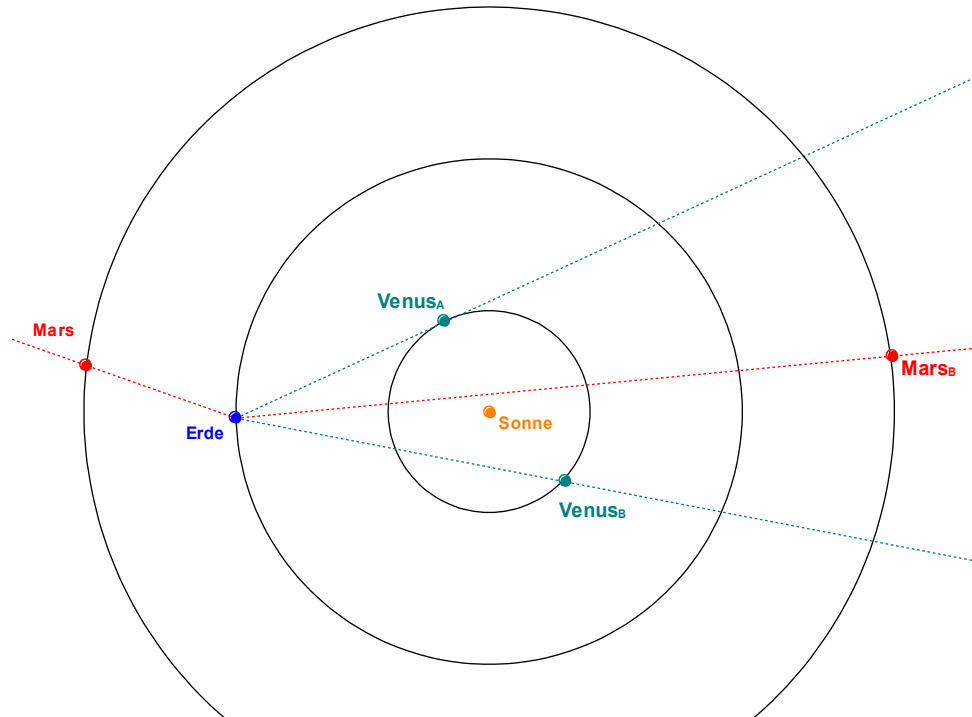


Abbildung 7: Von der Erde aus gesehen bewegt sich die Venus nie weit von der Sonne weg, während Mars überall am Himmel erscheinen kann. (siehe CD: PlanetenDifferenzierung.geo)

Diese Unterscheidung von inneren und äußeren Planeten ändert zwar nichts am Modell, welches Ptolemäus für die Wandelsterne verwendet, bestimmt aber in erheblichem Umfang, wie die Parameter des Modells mit Hilfe von Beobachtungen gewonnen und berechnet werden können.

Vorbemerkungen zur historischen Quelle

Ich möchte nun im folgenden Abschnitt erläutern, wie Ptolemäus vorgegangen ist, um aus seinen Beobachtungsdaten die benötigten Parameter für seine Planetenmodelle zu gewinnen. Dabei möchte ich das Verfahren für die inneren und die äußeren Planeten aus den im vorigen Abschnitt dargelegten Unterschieden getrennt voneinander behandeln. Als Repräsentant für einen äußeren Planeten habe ich den Saturn gewählt, für einen inneren Planeten die Venus. Damit folge ich der Auswahl von Olaf Pedersen, der in seinem Buch „A survey of the Almagest“ ebenfalls diese beiden Planeten näher behandelt. Dadurch ist es mir möglich, auf Pedersens nach heutigen Maßstäben umgewandelten Beobachtungsdaten Ptolemäus aufzubauen. Die Daten in Manitius Übersetzung des Almagest würden noch weitere Konvertierungen benötigen, für deren Durchführung mir schlicht das astronomische Hintergrundwissen an dieser Stelle fehlte.

Bevor ich jedoch in die eigentliche Thematik einsteige, möchte ich eine Reihe von Konventionen treffen, von denen ich im nachfolgenden Abschnitt regen Gebrauch machen werde. Die Konventionen sollen einen Kompromiss zwischen dem historischen Originaltext und der modernen Mathematik darstellen, die den Schülerinnen und Schülern geläufig ist.

Zahlenangaben im Almagest

Zwar rechneten die Griechen schon mit einem Zehnersystem, doch basierte dieses nicht wie unser heutiges Dezimalsystem auf einem Stellenwertsystem, sondern ähnlich wie bei römischen Zahlen auf einem Additionssystem. Da das Griechische keine separaten Zahlzeichen kannte, nutzte man zu diesem Zweck die Buchstaben des griechischen Alphabets. Die Buchstaben α bis θ repräsentierten dabei die Einer-Zahlen 1 bis 9, ι bis ζ die Zehner-Zahlen 10 bis 90 und σ bis ξ die Hunderter-Zahlen

100 bis 900⁷. Wollte man noch größere Zahlen darstellen, begann man im Alphabet wieder von vorne und fügte spezielle Markierungen hinzu. Die eingängliche Dezimalzahl 2323 liest sich trotz Zehnersystem daher im Griechischen als βτκγ.

Eine noch weitaus höhere Komplexität ist für die Darstellung von Brüchen erforderlich. Das Griechische kennt lediglich den n-ten Teil eines Ganzen, also Brüche wie $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4}$, wobei nur die Zahl n geschrieben und mit einem Apostroph versehen wurde. Brüche wie $\frac{3}{4}$ mussten dagegen aus der Addition von Brüchen gewonnen werden: $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ entspricht somit $\epsilon^8 + \delta'$.

Wie in der Einleitung beschrieben übernahmen die Griechen allerdings nicht nur einen Großteil der astronomischen Beobachtungen von den Babyloniern, sondern auch deren mathematische Fertigkeiten. Dazu zählte unter anderem auch das babylonische Zahlensystem, bei dem es sich bereits um ein Stellenwertsystem handelte, welches aber nicht wie das Dezimalsystem zur Basis 10 operierte, sondern zur Basis 60 – daher auch Sexagesimalsystem genannt. Dieses System zeichnet sich im Gegensatz zum Dezimalsystem durch seine große Teilervielfalt aus und ermöglichte so in vielen Fällen eine besonders einfache Division. Es erlangte einen großen Verbreitungsradius und ist uns bis heute etwa bei Winkelangaben oder bei der Zeitmessung erhalten geblieben.

Laut Pedersen verwendet Ptolemäus in seiner Arbeit sowohl das griechische Zahlensystem, als auch das babylonische umschrieben mit griechischen Zahlzeichen, als auch Mischformen aus beidem. Manitius stellt ptolemäische Zahlenangaben in seiner Übersetzung dagegen stets wie folgt dar:

7^p 30'

Die Zahl vor dem hochgestellten p gibt dabei jeweils den 60. Teil eines Ganzen an, ist also so gesehen die erste Nachkommastelle der babylonischen Zahl. Zahlen, die über 1 hinaus gehen, erhalten jedoch bei Manitius Darstellung keine weitere Stelle, sondern laufen über den Zahlenvorrat (0-59) hinaus. Das heißt, dass die Zahl 2,5 als 150^p dargestellt werden würde. Weitere Nachkommastellen der babylonischen Zahl werden dagegen in Form von Minuten und Sekunden ergänzt. Die obige Angabe entspricht somit der Dezimalzahl 0,125.

7 Da das griechische Alphabet nur 27 unterschiedliche Zeichen kennt, wurden drei zusätzliche Zeichen dem „Zahlalphabet“ hinzugefügt. Für die 6 „ς“ (Diagamma), für die 90 „ζ“ (Koppa) und für die 900 „ϛ“ (Sampi).

8 Das Zeichen „ε“ wurde speziell für die Darstellung des häufig verwendeten Bruchs $\frac{1}{2}$ verwendet.

Diese Mischdarstellung scheint zunächst verwirrend, folgt aber bei näherer Betrachtung der noch heute gebräuchlichen Darstellung von Winkelangaben. Dadurch lässt sie sich sogar mit den meisten üblichen Schultaschenrechnern problemlos handhaben. Es mag verlockend klingen, die Angaben für die Schülerinnen und Schüler bereits in Dezimalzahlen umzuwandeln, doch ergeben sich bei Umwandlung vom Sexagesimalsystem in das Dezimalsystem nur in sehr seltenen Fällen überhaupt endliche Dezimalzahlen. Dadurch wäre man bereits zu Beginn zu einem Rechnen mit gerundeten Werten verdammt. Daher möchte ich es nachfolgend stets solange wie möglich bei Angaben im Sexagesimalsystem belassen.

Entgegen Manitus Ansatz möchte ich für die eigentliche Darstellung einer Sexagesimalzahl jedoch die in der angelsächsischen Literatur gebräuchliche Darstellung verwenden, die auf Otto Neugebauer zurückgeht. Die obige Zahl würde in dieser Schreibweise wie folgt angegeben:

0;7,30 oder auch 7;30

je nachdem, ob man Manitus p-Zahl als erste Nach- oder Vorkommateile auffasst⁹. Diese Darstellung spiegelt meiner Meinung nach das Stellenwertsystem deutlich besser wieder als Manitus Variante. Dabei repräsentiert das Semikolon das Dezimaltrennzeichen (und weist gleichzeitig eine Zahl deutlich als Sexagesimalzahl aus), während das Komma die einzelnen Stellen voneinander trennt, da unser Zahlenvorrat selbst unter Zuhilfenahme von Buchstaben (wie bspw. bei der Darstellung von Hexadezimalzahlen) nicht für die Darstellung von 60 Zahlen ausreicht.

Elementare sphärische Geometrie im Almagest

Von seinem irdischen Standpunkt war es Ptolemäus unmöglich den Abstand zweier Himmelspositionen eines Planeten direkt zu ermitteln. Er konnte einzig den Winkel zwischen beiden Positionen direkt messen. Da er jedoch von exakten Kreisbahnen ausging und die Kreise in Ermangelung des Wissens um ihre tatsächliche Größe auf 1 normierte, konnte er daraus den relativen Abstand der Planetenpositionen herleiten. Während uns heute für solch elementare sphärische Geometrie in der Ebene die trigonometrischen Funktionen zur Verfügung stehen, waren diese Ptolemäus noch unbekannt.

⁹ Da Ptolemäus nicht mit absoluten Längenangaben rechnet, haben die verschiedenen Interpretationen keinen Einfluss auf das jeweilige Modell.

Stattdessen hatte zu Ptolemäus Zeiten die sog. Chord-Funktion eine große Verbreitung gefunden. Dem Chord eines Winkels wird dabei die Länge der dem Winkel gegenüberliegenden Basisseite eines gleichschenkligen Dreiecks mit einer auf 1 normierten Schenkellänge zugeordnet. Ein solches Dreieck erhält man eben dann, wenn man in einen Kreis mit Radius 1 eine beliebige Sehne einzeichnet und die Schnittpunkte zwischen Kreis und Sehne mit dem Mittelpunkt des Kreises verbindet.

Wie in den Anfangszeiten unserer heutigen trigonometrischen Funktionen, gewann man aus geometrischen Konstruktionen einzelne Zuordnungspaare von Chord und zugehöriger Sehnenlänge, welche man in Tabellen sammelte. Solche Chord-Tabellen müssen auch schon Ptolemäus zur Verfügung gestanden haben. Diese Tabellen waren ihm anscheinend aber nicht detailliert genug, so dass er sich zu Beginn des Almagest eingehend mit der Erstellung einer auf einen halben Grad unterteilten Chord-Tabelle beschäftigt, die er dann schließlich in Buch I, Kapitel 11 notiert.

Es erscheint mir jedoch in Anbetracht der modernen technischen Möglichkeiten, mit jedem Taschenrechner die Werte einer trigonometrischen Funktion auf mehrere Nachkommastellen genau ermitteln zu können, widersinnig, mit diesen Chord-Tabellen zu arbeiten. Daher werde ich im Folgenden bei derartigen Berechnungen auf die Sinusfunktion zurückgreifen und möchte an dieser Stelle kurz den auch für Schüler und Schülerinnen ab Jahrgangsstufe 10 leicht verständlichen Zusammenhang zwischen Chord- und Sinusfunktion darstellen.

Dazu bestimmen wir zunächst die Winkelhalbierende von α (siehe Abbildung 8). Da es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt, halbiert diese somit auch unsere Sehne und erzeugt gleichermaßen zwei rechtwinklige Teildreiecke. In einem solchen rechtwinkligen Dreieck lässt sich nun leicht der trigonometrische Zusammenhang

$$\sin \alpha_1 = \frac{a_1}{b}$$

finden. Berücksichtigen wir die zuvor konstruierten Verhältnisse $\alpha = 2 \cdot \alpha_1$ und $a = 2 \cdot a_1$ und außerdem, dass die Länge der Hypotenuse b auf 1 normiert war, so ergibt sich

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = a .$$

Daraus erhalten wir schließlich als Zusammenhang zwischen Chord- und Sinusfunktion:

$$\text{chord } \alpha = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

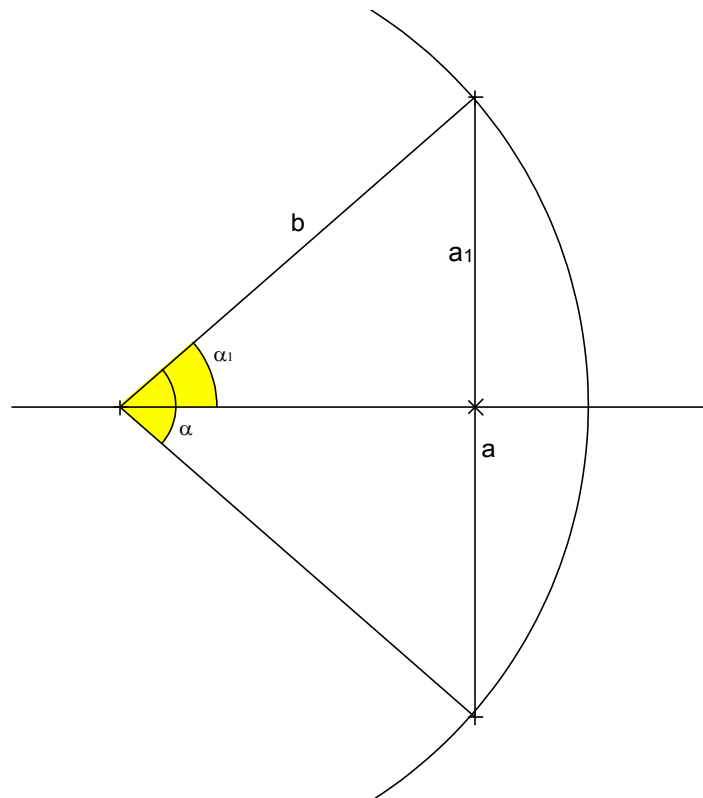


Abbildung 8: Zusammenhang zwischen Chord- und Sinusfunktion (siehe CD: Chord.geo)

Das ptolemäische Planetenmodell

Um ein vollständiges Planetenmodell nach Ptolemäus zu erhalten, müssen wir in der Hauptsache vier Parameter ermitteln, die da wären:

- die Bahngeschwindigkeit des Epizykels auf der Umlaufbahn
- die Bahngeschwindigkeit des Planeten auf dem Epizykel
- den Radius des Epizykel in Relation zum Radius der Umlaufbahn
- den Abstand der Erde zum Mittelpunkt der Umlaufbahn, ebenfalls wieder in Relation zum Radius der Umlaufbahn

Wie zuvor beschrieben, muss Ptolemäus bei inneren und äußeren Planeten unterschiedlich vorgehen, weswegen ich mir beide Planetenmodelle getrennt von einander angesehen habe. Dabei musste ich feststellen, dass sich das Verfahren für die Ermittlung der Parameter eines inneren Planeten wesentlich geeigneter für die Umsetzung mit dynamischer Geometriesoftware zeigte. Ich möchte dennoch das Verfahren für die äußeren Planeten in den Grundzügen erläutern, um die Schwierigkeiten besser verdeutlichen zu können, die sich dabei ergeben. Daher beginne ich meine Ausführungen mit einem Repräsentanten der äußeren Planeten, dem Saturn.

Bestimmung der Bahngeschwindigkeit des Saturn

Ptolemäus beginnt jedes Planetenmodell mit der Bestimmung der beiden Bahngeschwindigkeiten, da sich diese relativ leicht aus genügend vielen Beobachtungen ermitteln lassen. Nach seinem Modell bewegt sich der Planet stets mit gleichmäßiger Geschwindigkeit auf dem Epizykel. Von der Erde aus betrachtet, befindet sich der Planet demnach die Hälfte der Zeit links des gedachten

Mittelpunkts des Epizykels und die andere Hälfte der Zeit analog dazu rechts des Mittelpunkts.

Betrachtet man nun die Bewegung des Planeten während eines gesamten Umlaufs auf dem Epizykel, so verhält es sich durchschnittlich gleichwertig wie ein Modell nach dem der Planet permanent im Mittelpunkt des Epizykels verharrt, also ein Modell in dem der Epizykel keine Rolle mehr spielt. Misst man die Zeit zwischen der Wiederkehr von scheinbaren Rückwärtsbewegungen des Planeten (nachfolgend als Anomalie zweiter Art bezeichnet), kann man daraus Rückschlüsse auf die Bahngeschwindigkeit des Epizykels auf der Umlaufbahn resp. des Planeten ohne Berücksichtigung der zweiten Anomalie erhalten. Pedersen spricht daher auch von der mittleren Planetenbewegung bzw. von der mittleren Position eines Planeten. Diese Bezeichnungen will ich im Folgenden übernehmen.

Die Bahngeschwindigkeit des Planeten auf dem Epizykel wiederum ergibt sich als einfache Konsequenz des Zeitraums, die während der Wiederkehr von zwei nachfolgenden Anomalien zweiter Art vergeht. In diesem Zeitraum, muss der Planet einmal seinen gesamten Epizykel abgelaufen haben. Pedersen spricht hier in Abgrenzung zur mittleren Planetenbewegung wörtlich übersetzt von der „Planetenbewegung in Anomalie“. Die Position des Planeten werde ich dabei als tatsächliche Planetenposition bezeichnen.

Da die Anomalien schon lange vor Ptolemäus von den Astronomen beobachtet wurden, gab es zu seiner Zeit bereits weithin bekannte Verhältnisse, die Ptolemäus als Grundlage für die Ermittlung der Bahngeschwindigkeiten hätte hernehmen können. Für den Saturn überlieferten die Babylonier laut Neugebauer¹⁰ ein Verhältnis von folgender Gestalt:

$$256 T_a = 9 T_t = 265^a$$

Dabei steht T_a für die Anzahl von Anomalien zweiter Art innerhalb der angegebenen 265 Jahre, und T_t für die Anzahl der Wiederkehr einer bestimmten Himmelsposition des Planeten vor dem Fixsternhimmel, was somit gleichbedeutend mit der Anzahl der Umläufe des Planeten resp. seines Epizykels auf seiner Umlaufbahn ist. Die Angabe liest sich mit dem ptolemäischen Modell daher so, dass Saturn in 265 Jahren 9-mal auf seiner Umlaufbahn und dabei 256-mal auf seinem Epizykel rotierte.

Trotz dieses langen Messzeitraums sind die Verhältnisse aus heutiger Sicht nur als grobe Abschätzungen zu werten. Es erscheint zweifelhaft, dass sich ein exakt

¹⁰ Pedersen, 1974, S. 269

ganzzahliges Verhältnis ergeben könnte. Für damalige Messungen mit bloßem Auge waren die Messungen jedoch ausreichend genau. Trotzdem bringt Ptolemäus im Almagest sein eigenes Verhältnis für den Saturn an:

„Die 57 Wiederkehren in Anomalie des Saturns fanden wir sich vollziehen in 59 Sonnenjahren, wie sie zu unserer Zeit üblich sind – d.h. in Jahren welche von Wende oder Nachtgleiche bis wieder zu demselben Punkte laufen – und hierüber $1\frac{3}{4}^d$, zusammenfallend mit 2 Umläufen des Planeten (von einer Wende bis wieder zu derselben) und hierüber $1^\circ 43'$.“

Manitius, 2. Band, Seite 99, Zeile 24 ff.

Ptolemäus gibt keinen Hinweis darauf, wie er zu dieser genauen Messung innerhalb des von ihm gewählten, relativ kurzen Zeitraums gelangt. Es scheint aber ausgeschlossen, dass er diese Messung wortwörtlich so vornahm. Dazu hätte die Genauigkeit der damaligen Messmethoden keinesfalls ausgereicht, wie Pedersen anführt. Viel eher ist anzunehmen, dass Ptolemäus aus einer Vielzahl weit auseinander liegender Messungen dieses Verhältnis rechnerisch ermittelte.

Als Konsequenz dieser Verhältnisse lassen sich nun die beiden gesuchten Bahngeschwindigkeiten durch einfache Division bestimmen. Dabei entsprechen die 57 Anomalien zweiter Art 57 Rotationen des Planeten auf dem Epizykel, was einer Gesamtrotation von $57 \cdot 360^\circ = 20520^\circ$ entspricht. Die 2 Umläufe plus $1^\circ 43'$ entsprechen analog dazu $2 \cdot 360^\circ + 1; 43^\circ = 721; 43^\circ$. Und der angeführte Zeitraum ergibt bei Berücksichtigung der von Ptolemäus ermittelten Jahreslänge¹¹ $59 \cdot 365; 14,48^d + 1; 45^d = 21551; 18,12^d$.

Damit ergibt sich für die mittlere Planetenbewegung eine Winkelgeschwindigkeit von:

$$\frac{721; 43^\circ}{21551; 18,12^d} = 0; 2,0,33,31,28,51^\circ/d$$

und für die Planetenbewegung in Anomalie eine Winkelgeschwindigkeit von:

$$\frac{20520^\circ}{21551; 18,12^d} = 0; 57,7,43,41,43,40^\circ/d$$

¹¹ Manitius, 2. Band, Seite 100, Zeile 31

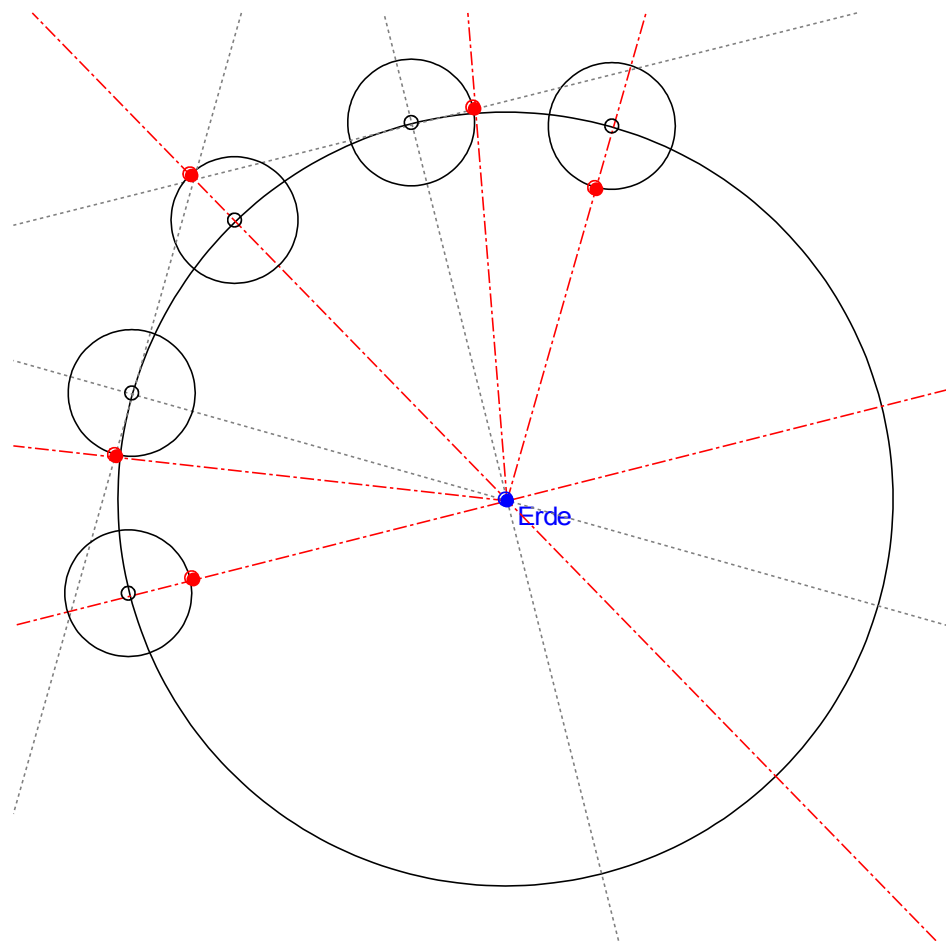
Das Problem des Epizykelradius des Saturn

Alles was nun noch bestimmt werden muss, ist der Radius des Epizykels und der Abstand von Mittelpunkt der Umlaufbahn und Erde. Lässt man die schwankende Bahngeschwindigkeit (nachfolgend als erste Anomalie bezeichnet) und somit den Abstand vom Mittelpunkt der Umlaufbahn außer Acht, so ließe sich der Radius des Epizykels relativ leicht ermitteln. Alles was man dazu braucht, ist der Winkel zwischen der mittleren (aufgrund der mittleren Bahngeschwindigkeit berechneten) und der tatsächlichen Position des Planeten vor dem Fixsternhimmel (α) und das Wissen, an welchem Punkt sich der Planet zu dieser Zeit auf dem Epizykel relativ zur Richtung der Erde befindet (β). Mit Hilfe des heute geläufigen Sinussatzes kann so der Epizykelradius (b) im Verhältnis zum Radius der Umlaufbahn (normiert mit $a=1$) problemlos bestimmt werden:

$$b = \frac{\sin \beta}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)}$$

Die Schwierigkeit besteht jedoch darin, dass für gewöhnlich durch Beobachtungen nicht auf die Position des Planeten auf seinem Epizykel geschlossen werden kann. Schon vor Ptolemäus war allerdings bekannt, dass die Opposition eines Planeten immer genau in der Mitte seiner Schleifenbewegung resp. Rückwärtsbewegung (im zweidimensionalen Modell) eintritt. Da während einer Opposition Planet, Erde und Sonne in einer Linie stehen müssen, kann sich der Planet zu diesem Zeitpunkt nur an zwei Positionen auf dem Epizykel befinden: entweder am erdnächsten Punkt des Epizykels (180°) oder am erdfernten Punkt (360°). Da daraus allerdings automatisch folgt, dass in diesem Fall der Winkel β 0° beträgt, liefert obige Formel keine Ergebnisse mehr.

Die Lösung liegt in der Betrachtung von zwei direkt aufeinander folgenden Opposition. Kennt man deren zeitlichen Abstand und berücksichtigt, dass sich der Planet auf seinem Epizykel mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, so lässt sich daraus jede Zwischenposition des Planeten extrapolieren. Auch Ptolemäus hätte ohne Kenntnis des Sinussatzes bspw. durch Messung bei $\alpha = 90^\circ$ den Epizykelradius (b) mit Hilfe seiner Sehnenberechnung ermitteln können.



Zeichnung 9: Bewegung des Planeten auf seinem Epizykel zwischen zwei Oppositionen in einem Modell ohne erste Anomalie

Diese einfache Bestimmung des Epizykelradius bei den äußeren Planeten wird aber durch die parallele Existenz der ersten Anomalie jäh zu Nichte gemacht. Diese ist schließlich dafür verantwortlich, dass zwei Oppositionen eben in leicht unterschiedlichen Abständen auftreten. Je nach Auswahl der zwei Oppositionen für obiges Berechnungsmodell erhielte man daher immer wieder verschiedene Werte für die Größe des Epizykelradius. Mit den Methoden der Analysis ließe sich, genügend Beobachtungen von Oppositionen vorausgesetzt, aller Voraussicht nach eine geeignete Funktion ermitteln (der Theorie nach eine zusammengesetzte Funktion mit linearem und trigonometrischem Anteil), deren Steigung die Bahngeschwindigkeit des Epizykels auf der Umlaufbahn widerspiegelt und mit

deren Hilfe sich dann die zur tatsächlichen Planetenposition gehörende mittlere Position jederzeit rechnerisch ermitteln ließe.

Doch dieses Vorgehen würde an keiner Stelle den Einsatz dynamischer Geometriesoftware beinhalten. Allerdings standen auch Ptolemäus die Mittel der Analysis damals noch nicht zur Verfügung und so musste auch er die Bestimmung der Größe des Epizykelradius zurückstellen und sich zunächst dem Abstand von Erde und Mittelpunkt der Umlaufbahn widmen. Aber auch hier kommt Ptolemäus nicht um einen großen rechnerischen Anteil herum. Im Hinblick auf den sinnvollen Einsatz dynamischer Geometriesoftware empfand ich das Verfahren für die äußeren Planeten im Vergleich zu dem der inneren Planeten zu komplex, zu langwierig und vor allem zu rechenlastig. Daher habe ich mich für die konkrete Umsetzung für das Modell eines inneren Planeten, der Venus, entschieden.

Bestimmung der Bahngeschwindigkeit der Venus

Auch für das Modell der Venus ermitteln wir zunächst wieder die Bahngeschwindigkeiten, wie ich es bereits zum Saturn näher ausgeführt habe. Ptolemäus schreibt über die Venus:

„Die 5 Wiederkehren in Anomalie der Venus fanden wir sich vollziehen in 8 heutzutage üblichen Sonnenjahren weniger 2^d18', zusammenfallend mit 8 Umläufen, welche ebensovielen der Sonne gleich sind, weniger 2°15'.“

Manitius, 2. Band, Seite 100, Zeile 19 ff.

Besonders hervorgehoben sei hier bereits der kleine, aber für das weitere Vorgehen entscheidende Nebensatz, dass die Venus in den 5 Wiederkehren der Anomalie ebensoviele Umläufe vollzieht, wie die Sonne. Dies ist aus heutiger Sicht nur allzu verständlich, da die Venus nach unserem modernen Modell die Sonne umkreist und wir sozusagen „von außen“ die gesamte Venusbahn betrachten. Rechnet man somit die von der Erde aus betrachteten Abweichungen nach links und rechts zur Sonne während eines Venusumlaufs zusammen, befindet sich die mittlere Venus stets an der mittleren Position der Sonne. In einem Weltmodell, in dem die Sonne die Erde umkreist, ist somit verständlich, dass die Venus die gleiche Bahngeschwindigkeit wie die Sonne aufweisen muss.

Aus den obigen Angaben kann Ptolemäus nun wieder die Winkelgeschwindigkeiten durch Division erhalten. Für die mittlere Planetenbewegung der Venus ergibt sich somit:

$$\frac{8 \cdot 360^\circ - 2; 15^\circ}{8 \cdot 365; 14,48^d - 2; 18^d} = \frac{2877; 45^\circ}{2919; 40,24^d} = 0; 59,8,17,13,12,31^\circ/d$$

und für die Planetenbewegung in Anomalie gleichermaßen:

$$\frac{5 \cdot 360^\circ}{8 \cdot 365; 14,48^d - 2; 18^d} = \frac{1800^\circ}{2919; 40,24^d} \approx 0; 36,59,25,53,11,28^\circ/d^{12}$$

Bestimmung des Epizykelradius der Venus

Das größte Problem bei der Bestimmung des Epizykelradius ist, wie schon im vorigen Abschnitt veranschaulicht, die Bestimmung der Position des Planeten auf seinem Epizykel, um damit durch Messung des Abstands zwischen tatsächlicher und mittlerer Position des Planeten auf die Größe des Radius schließen zu können. Konnte man bei den äußeren Planeten noch aus der bekannten Position bei Oppositionen die Position des Planeten auf seinem Epizykel extrapolieren, ist dies bei den inneren Planeten nicht möglich – sie geraten schließlich nie in Opposition. Folglich musste Ptolemäus für die inneren Planeten einen ganz neuen Ansatz wählen.

Wie eingangs erwähnt, sind die mittleren Bahngeschwindigkeiten der Sonne und der inneren Planeten gleich. Man kann daher den Mittelpunkt des Epizykels eines inneren Planeten, der sich eben mit gleichmäßiger Geschwindigkeit auf der Umlaufbahn bewegt, folgerichtig an die Position der mittleren Sonne setzen. Der Radius des Epizykels legt nun fest, wie weit sich der Planet seitlich betrachtet vom Mittelpunkt des Epizykels entfernen kann. Diese Aussage ist jedoch gleichwertig damit, wie weit sich der Planet von der mittleren Sonne entfernen kann. Diese maximale Entfernung wird in der Astronomie auch als maximale Elongation bezeichnet (siehe Abbildung 10).

Ohne Berücksichtigung der ersten Anomalie würde es ausreichen, die maximale Elongation der Venus einmal zu messen, um über eine einfache Dreieckskonstruktion direkt die Größe des Epizykelradius zu erhalten. Die erste Anomalie sorgt aber nun wie bei den äußeren Planeten dafür, dass unsere Messungen der maximalen Elongation unterschiedlich ausfallen würden. Nach ptolemäischem Weltbild liegt das darin begründet, dass sich die Erde eben nicht genau im Mittelpunkt der Umlaufbahn des jeweiligen Planeten befindet, sondern

¹² Dieser Wert beinhaltet laut Pedersens Ausführungen (1974, S. 296) eine geringfügige Abweichung, die Ptolemäus nachträglich als Korrekturfaktor hinzufügt.

leicht versetzt dazu. Daraus folgt, dass der Abstand von der Erde zum Planeten schwankt und somit der Abstand vom tatsächlichen zum mittleren Planeten ebenso scheinbar schwankt.

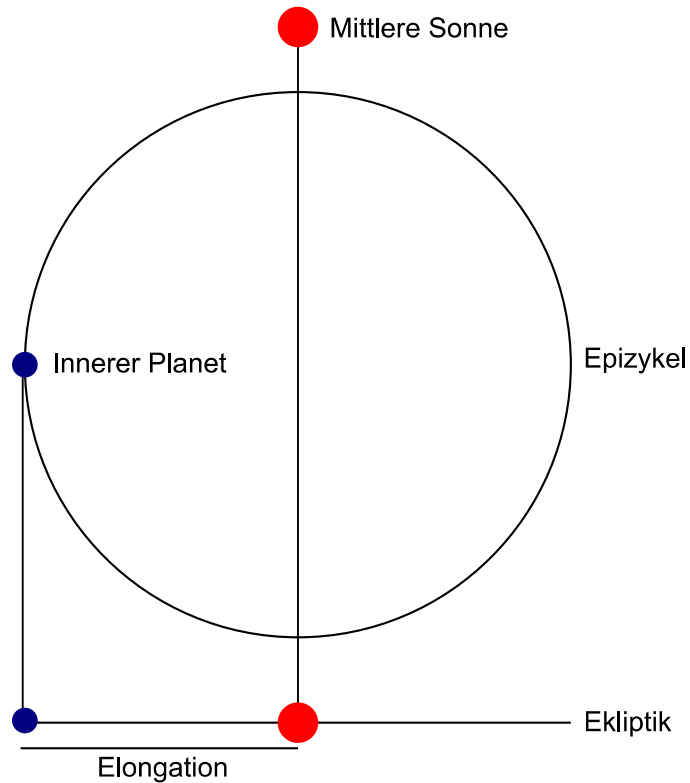


Abbildung 10: Elongation eines inneren Planeten in der Auf- und Seitenansicht

Ptolemäus beginnt seine Untersuchung daher damit, den erdnächsten Punkt (Perigäum) und den erdfernten Punkt (Apogäum) der mittleren Venus, also dem Mittelpunkt des Epizykels, zu bestimmen. Betrachtet man nämlich die Verbindungslinie dieser beiden Punkte, so ist offensichtlich, dass die Erde genau auf dieser Linie aus dem Mittelpunkt der Umlaufbahn in Richtung des Perigäums verschoben sein muss, damit alle anderen Punkte der Umlaufbahn einen geringeren Abstand als der Punkt des Apogäums und einen größeren Abstand als der Punkt des Perigäums haben.

Ptolemäus wählt aus seinem großen Fundus an Beobachtungsdaten zum Zeitpunkt der maximalen Elongation für diese Aufgabe zwei spezielle aus. Eine, die ihm vom

Mathematiker Theon von Smyrna überliefert war (I), und eine, die er selbst durchgeführt hatte (II).

Beobachtung I¹³

Datumsangabe im Almagest	16. Jahr Hadrians 21/22. Pharmuthi abends
Datumsangabe nach gregorianischem Kalender	132 n. Chr. 7. März 19 Uhr
Position der tatsächlichen Venus	31;30°
Position der mittleren Venus / Sonne	344;15°

Beobachtung II¹⁴

Datumsangabe im Almagest	4. Jahr Antonins 11/12. Thoth morgens
Datumsangabe nach gregorianischem Kalender	140 n. Chr. 30. Juli 4:30 Uhr
Position der tatsächlichen Venus	78;30°
Position der mittleren Venus / Sonne	125;45°

Berechnen wir nun die jeweilige Elongation zwischen Venus und Sonne erhalten wir für die erste Messung

$$31;30^\circ - 344;15^\circ = 47;15^\circ$$

Elongation in östlicher Richtung und für die zweite Messung

$$125;45^\circ - 78;30^\circ = 47;15^\circ$$

in westlicher Richtung. Hier zeigt sich nun, dass Ptolemäus die beiden Beobachtungen gerade so ausgewählt hat, dass sich die gleiche, maximale Elongation ergibt. Die gleiche Elongation kann sich aber nur ergeben, wenn in beiden Fällen die Venus genau gleich weit von der Erde entfernt ist. Dies trifft jeweils immer nur auf ein Punktepaar auf dem Kreis zu, welches ebenso gleichen Abstand von der Perigäums-Apogäums-Linie (Apsidenlinie) aufweisen muss. Somit muss sich

¹³ Manitius, 2. Band, S. 156, Z. 13 ff. (Originaldaten) / Pedersen 1974, S. 299 (Konvertierte Daten)

¹⁴ Manitius, 2. Band, S. 156, Z. 27 ff. (Originaldaten) / Pedersen 1974, S. 299 (Konvertierte Daten)

der Theorie nach, diese Linie genau zwischen den beiden Beobachtungswerten der mittleren Venus resp. Sonne befinden. Daraus folgt, dass sich die Apsidenlinie bei $55;0^\circ$ resp. bei $235;0^\circ$ befindet.

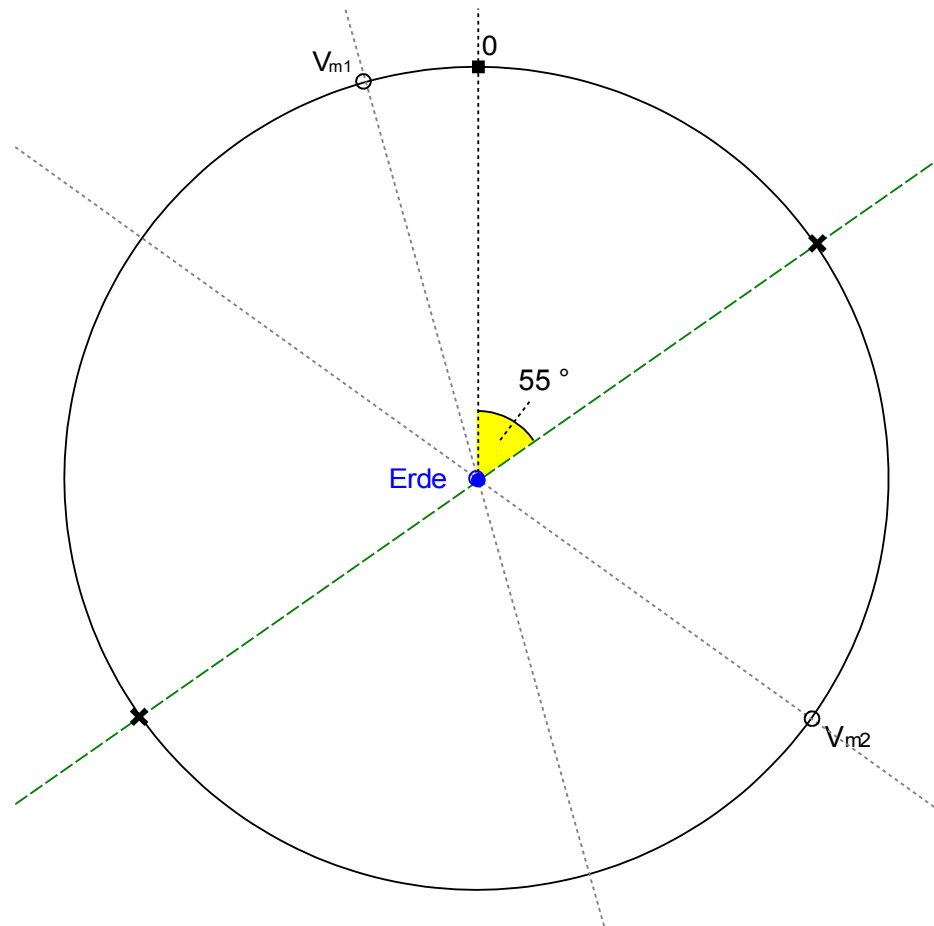


Abbildung 11: Apogäumsbestimmung mit Hilfe von DynaGeo (siehe CD: Apogäumsbestimmung.geo)

Unklar ist allerdings weiterhin, auf welchen Seiten dieser Linie sich das Apogäum und wo das Perigäum befindet. Zu diesem Zweck wählt Ptolemäus ein weiteres Beobachtungspaar mit gleicher, maximaler Elongation aus. Zwar würde eine einzige weitere Beobachtung für die zunehmende oder abnehmende Tendenz der Elongation ausreichen, um endgültig die Lage von Perigäum und Apogäum zu bestimmen, doch Ptolemäus kann so im gleichen Zug sein Modell auf Korrektheit prüfen.

Auch hier übernahm Ptolemäus wieder die erste Beobachtung von Theon, die zweite fertigte er selbst an:

Beobachtung III¹⁵

Datumsangabe im Almagest	12. Jahr Hadrians 21/22. Athyr morgens
Datumsangabe nach gregorianischem Kalender	127 n. Chr. 11. Oktober 6:30 Uhr
Position der tatsächlichen Venus	150;20°
Position der mittleren Venus / Sonne	197;52°

Beobachtung IV¹⁶

Datumsangabe im Almagest	21. Jahr Hadrians 9/10. Mechir abends
Datumsangabe nach gregorianischem Kalender	136 n. Chr. 25. Dezember 18:30 Uhr
Position der tatsächlichen Venus	319;36°
Position der mittleren Venus / Sonne	272;4°

Auch hier ergeben sich wie beschrieben gleiche Elongationen , nämlich

$$197;52^{\circ} - 150;20^{\circ} = 47;32^{\circ}$$

in westlicher Richtung resp.

$$319;36^{\circ} - 272;4^{\circ} = 47;32^{\circ}$$

in östlicher Richtung.

Ermittelt man auch hier wieder die theoretische Position der Apsidenlinie, so erhält man 54;58° resp. 234;58°. Die Abweichung von 0;2° zur ersten Berechnung betrachtet Ptolemäus als nicht „wesentlichen Fehler“¹⁷ und fühlt daher sein Modell bestätigt. Auch die Frage nach der Ausrichtung von Apo- und Perigäum kann nun

15 Manitius, 2. Band, S. 157, Z. 14 ff. (Originaldaten) / Pedersen 1974, S. 299 (Konvertierte Daten)

16 Manitius, 2. Band, S. 158, Z. 1 ff. (Originaldaten) / Pedersen 1974, S. 299 (Konvertierte Daten)

17 Manitius, 2. Band, S. 158, Z. 18

abschließend erklärt werden. Da sich bei der zweiten Messung größere Elongationen ergaben, muss sich das Perigäum folglich auf dem kürzen Kreisbogen zwischen diesen beiden mittleren Venuspositionen befinden. Somit liegt das Perigäum bei 235° und das Apogäum bei 55° .

Aus diesen Erkenntnissen kann Ptolemäus nun durch geschickte Konstruktion die Größe des Epizykelradius unter Berücksichtigung der ersten Anomalie gewinnen. Dazu benötigt er zwei weitere Messungen, nämlich gerade solche, bei denen die Venus zum Zeitpunkt der maximalen Elongation genau ihr gerade ermitteltes Perigäum resp. ihr Apogäum durchläuft. Die erste Beobachtung wurde erneut von Theon überliefert, die zweite Messung von Ptolemäus selbst angefertigt.

Beobachtung V (Apogäum)¹⁸

Datumsangabe im Almagest	13. Jahr Hadrians 2/3. Epiphi morgens
Datumsangabe nach gregorianischem Kalender	129 n. Chr. 20. Mai 5 Uhr
Position der tatsächlichen Venus	$10;36^\circ$
Position der mittleren Venus / Sonne	$55;24^\circ$

Beobachtung VI (Perigäum)¹⁹

Datumsangabe im Almagest	21. Jahr Hadrians 2/3. Tybi abends
Datumsangabe nach gregorianischem Kalender	136 n. Chr. 18. November
Position der tatsächlichen Venus	$282;50^\circ$
Position der mittleren Venus / Sonne	$235;30^\circ$

Wie zu sehen ist, erreicht die Venus bei den verwendeten Messungen ihr Apogäum und Perigäum nicht exakt, sondern befindet sich jeweils etwa einen halben Grad entfernt davon. Dies ist erneut eine Ungenauigkeit, die Ptolemäus hinnehmen muss. Wenn man aber bedenkt, dass die Venus jedes Jahr nur ein bis zwei Mal ihre maximale Elongation erreicht, scheint es zweifelhaft, ob Ptolemäus selbst bei

¹⁸ Manitius, 2. Band, S. 158, Z. 26 ff. (Originaldaten) / Pedersen 1974, S. 299 (Konvertierte Daten)

¹⁹ Manitius, 2. Band, S. 159, Z. 19 ff. (Originaldaten) / Pedersen 1974, S. 299 (Konvertierte Daten)

Rückgriff auf noch viel frühere Beobachtungen, deren Genauigkeit dann wiederum fragwürdig wären, bessere Werte erhalten hätte.

Übertragen auf das Modell sind diese Messungen nun gerade so angelegt, dass die mittlere Venus beider Messungen, die Erde und das Zentrum der Umlaufbahn genau auf einer Linie liegen (gegeben durch die Wahl von Peri- und Apogäum für die Messung) und die Verbindungslinie zwischen Erde und tatsächlicher Venus genau tangential an den Epizykel anliegt (gegeben durch die maximale Elongation). Verbindet man schließlich noch jeweils die Positionen von mittlerer und tatsächlicher Venus, erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Seite r_e gerade die Größe des Epizykelradius besitzt. In Ermangelung konkreter Entfernungsmessungen normiert Ptolemäus die Strecke zwischen beiden mittleren Venuspositionen auf 2, sodass der Radius der Umlaufbahn r_u gerade 1 ist.

Berechnung mit Hilfe trigonometrischer Funktionen

Zunächst möchte ich aufzeigen, wie sich aus diesem Modell nun mit Hilfe der uns heute bekannten Sinusfunktion die gesuchten Werte ermitteln lassen lassen; wie man es also beispielsweise in 10. Jahrgangsstufe einbringen könnte. Aus den obigen Vorgaben lassen sich zwei Gleichungen aufstellen, nämlich:

$$\sin \alpha_1 = \frac{r_e}{r_u - e} \quad \text{und} \quad \sin \alpha_2 = \frac{r_e}{r_u + e}$$

Setzen wir für r_u wie oben gesagt in Ermangelung konkreter Entfernungen 1 ein und lösen nach r_e auf, so erhalten wir:

$$r_e = \sin \alpha_1 \cdot (1 - e) \quad \text{und} \quad r_e = \sin \alpha_2 \cdot (1 + e)$$

Die Gleichungen können somit gleichgesetzt werden und es folgt:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 \cdot (1 - e) &= \sin \alpha_2 \cdot (1 + e) \\ \Leftrightarrow \sin \alpha_1 - e \cdot \sin \alpha_1 &= \sin \alpha_2 + e \cdot \sin \alpha_2 \\ \Leftrightarrow e (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) &= \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 \\ \Leftrightarrow e &= \frac{\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2} \end{aligned}$$

Setzen wir die aus der Messung gewonnenen Werte für α_1 und α_2 ein, so erhalten wir zunächst für die Exzentrizität der Erde:

$$e = \frac{\sin 47; 20^\circ - \sin 44; 48^\circ}{47; 20^\circ + \sin 44; 48^\circ} = 0; 1,15$$

und weiterhin für die Größe des Epizykelradius aus einer der ersten Gleichungen:

$$r_e = \sin 47; 20^\circ \cdot (1 - 0; 1,15) = 0; 43,10$$

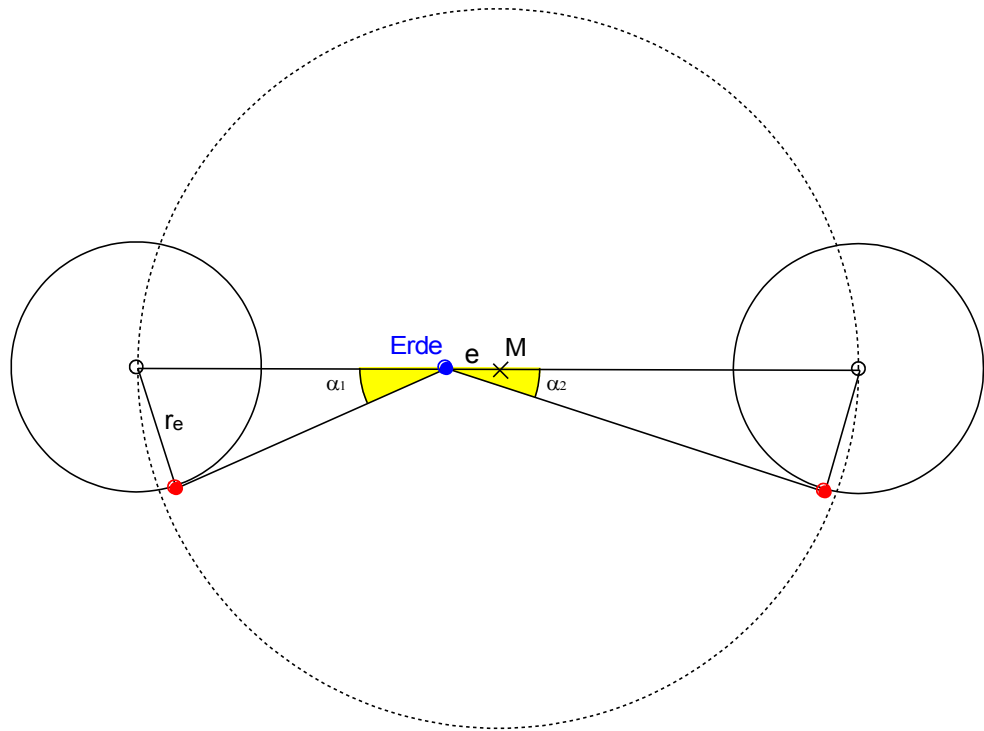


Abbildung 12: Planskizze für die trigonometrische Epizykelbestimmung

Diese Rechenschritte sollten Schüler der Jahrgangsstufe 10 mit Einführung der trigonometrischen Funktionen ohne größere Schwierigkeiten nachvollziehen können. Im Folgenden möchte ich nun demgegenüber eine Möglichkeit aufzeigen, wie auch Schüler schon ab etwa Jahrgangsstufe 7 mit Einführung der geometrischen Konstruktionen mit Hilfe von dynamischer Geometriesoftware die gesuchten Werte ganz ohne trigonometrische Funktionen ermitteln können.

Bestimmung mit Hilfe von dynamischer Geometriesoftware

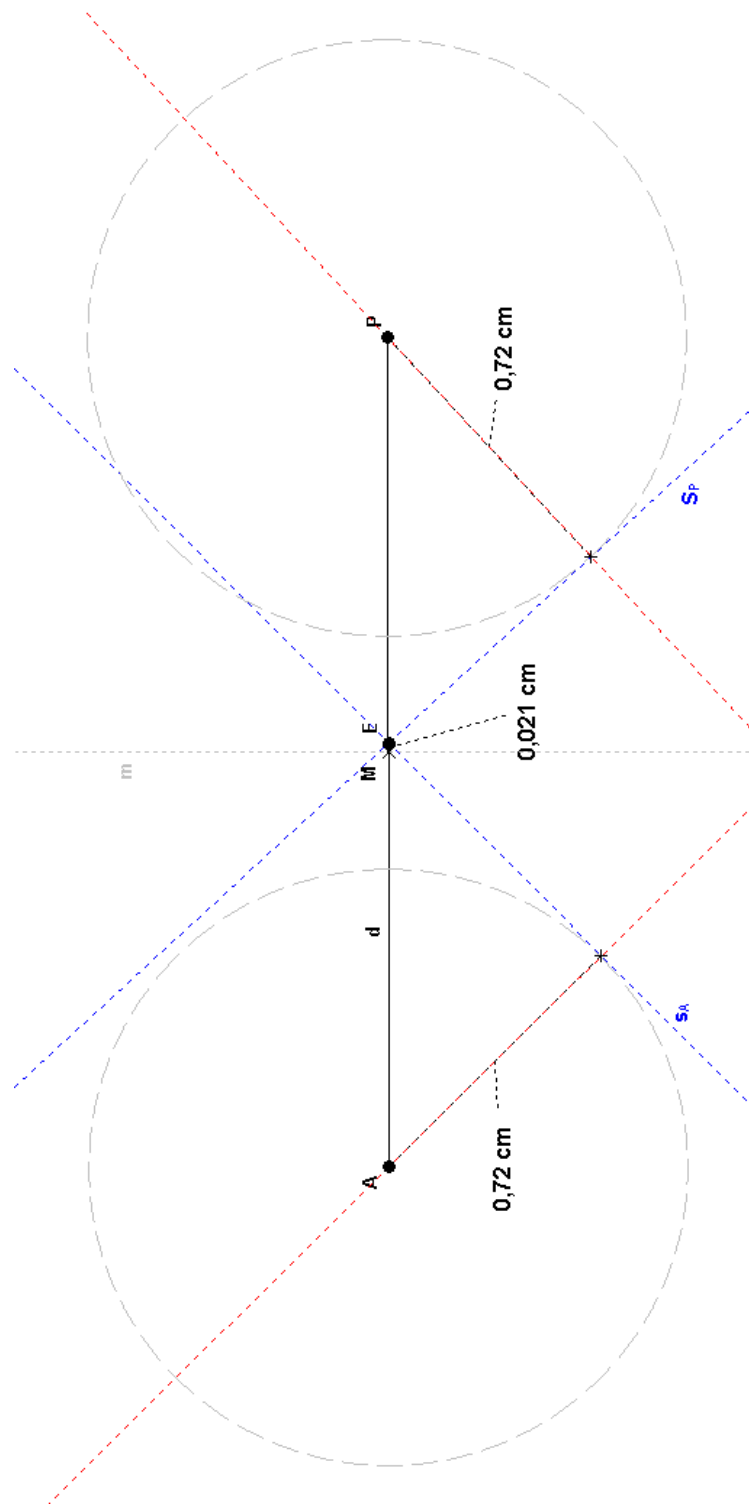
Die grundlegende Idee hinter den Konstruktionen mittels dynamischer Geometriesoftware ist es, mit einem freien Objekt (bspw. einem freien Punkt, einer freien Streckenlänge oder einem freien Kreisradius) zu starten und alle anderen Objekte gemäß den Bedingungen des Modells an dieses Objekt zu binden. Nach Fertigstellung der Konstruktion kann nun (im Gegensatz zur Konstruktion mit Papier und Bleistift) das freie Objekt beliebig bewegt oder in der Größe verändert werden, woraufhin die dynamische Geometriesoftware das Modell gemäß den Bindungen unmittelbar neu berechnet. Die Schülerinnen und Schüler können nun mit dem freien Objekt nach ihren eigenen Vorstellungen herum experimentieren und so ein stimmiges Modell durch geschicktes Ausprobieren finden und dabei gegebenenfalls sogar intuitiv Gesetzmäßigkeiten bemerken.

Um zu einem geeigneten Venusmodell zu gelangen, stehen den Schülern und Schülerinnen verschiedene Vorgehensweisen offen, die davon abhängig sind, mit welchem freien Objekt man startet. Im Folgenden möchte ich exemplarisch zwei grundsätzlich verschiedene Konstruktionen aufzeigen.

Die erste Konstruktion (siehe CD: ModellA.geo) ähnelt am ehesten der ursprünglichen Vorgehensweise Ptolemäus. Frei bleibt hierbei zunächst die Position der Erde auf der Verbindungslinie zwischen beiden mittleren Venuspositionen im Peri- bzw. Apogäum.

1. Man konstruiere eine Strecke d der Länge 2 cm mit den Endpunkten A (pogäum) und P (erigäum), welche den Abstand zwischen den beiden Positionen der mittleren Venus während des Apo- resp. Perigäums repräsentiere. Die Strecke stellt somit den auf 2 normierten Durchmesser der Umlaufbahn der mittleren Venus dar.
2. Nun konstruiere man eine Mittelsenkrechte m zur Strecke d , um den Mittelpunkt M und somit den Mittelpunkt der Umlaufbahn der Venus zu bestimmen²⁰.

²⁰ Alternativ kann abweichend von der klassischen Konstruktion mit DynaGeo auch direkt der Mittelpunkt zwischen beiden Punkten bestimmt werden.



4. Man binde einen freien Punkt E an die Strecke d, der die noch zu bestimmende Position der Erde repräsentiere. O.B.d.A positionieren wir diesen zwischen dem Mittelpunkt M und dem Endpunkt P, wodurch das Perigäum nun automatisch in Punkt P liegt, das Apogäum entsprechend in A.
5. Da unsere Beobachtungen allesamt von der Erde aus angestellt wurden, legen wir nun an den Punkt E die ermittelten Winkel zwischen mittlerer und tatsächlicher Venus während des Apo- resp. Perigäums an die Strecke d. Da DynaGeo nur Eingaben im Dezimalsystem verarbeiten kann, müssen die Winkel zunächst entsprechend umgerechnet werden.

$$\alpha_A = 44;48^\circ = 44,800^\circ$$

$$\alpha_P = 47;20^\circ \approx 47,333^\circ$$

6. Da die soeben konstruierten Schenkel „Erde – tatsächliche Venus“ (im Folgenden s_A und s_P genannt) tangential an den Epizykel anliegen müssen (vgl. mit Definition der maximalen Elongation), konstruieren wir als nächstes je eine Orthogonale zu s_A und s_P durch die Punkte A und P.
7. Der Abstand zwischen A resp. B und den soeben konstruierten Fußpunkten der Orthogonalen repräsentiert nun die Größe des Epizykels um A resp. B. Man bestimme daher mit DynaGeo die Länge der beiden Strecken. Im Regelfall sollten sich hier zwei verschieden große Abstände ergeben, was jedoch der Tatsache widerspricht, dass der Epizykel eine konstante Größe besitzt.
8. Daher verschiebe man nun den Punkt E (Erde) gerade so auf der Strecke d, dass die Radien der Epizykel übereinstimmen. Nun kann die Größe des Epizykelradius abgelesen und der Abstand von M und E durch eine weitere Abstandsmessung bestimmt werden.

In meiner Beispielkonstruktion erhalte ich für den Radius des Epizykels

$$r_e = 0,720 \text{ cm} = 0;43,12 \text{ (zuvor berechnet: } 0;43,10)$$

und für den Abstand zwischen Mittelpunkt der Umlaufbahn und Erde, also die Exzentrizität,

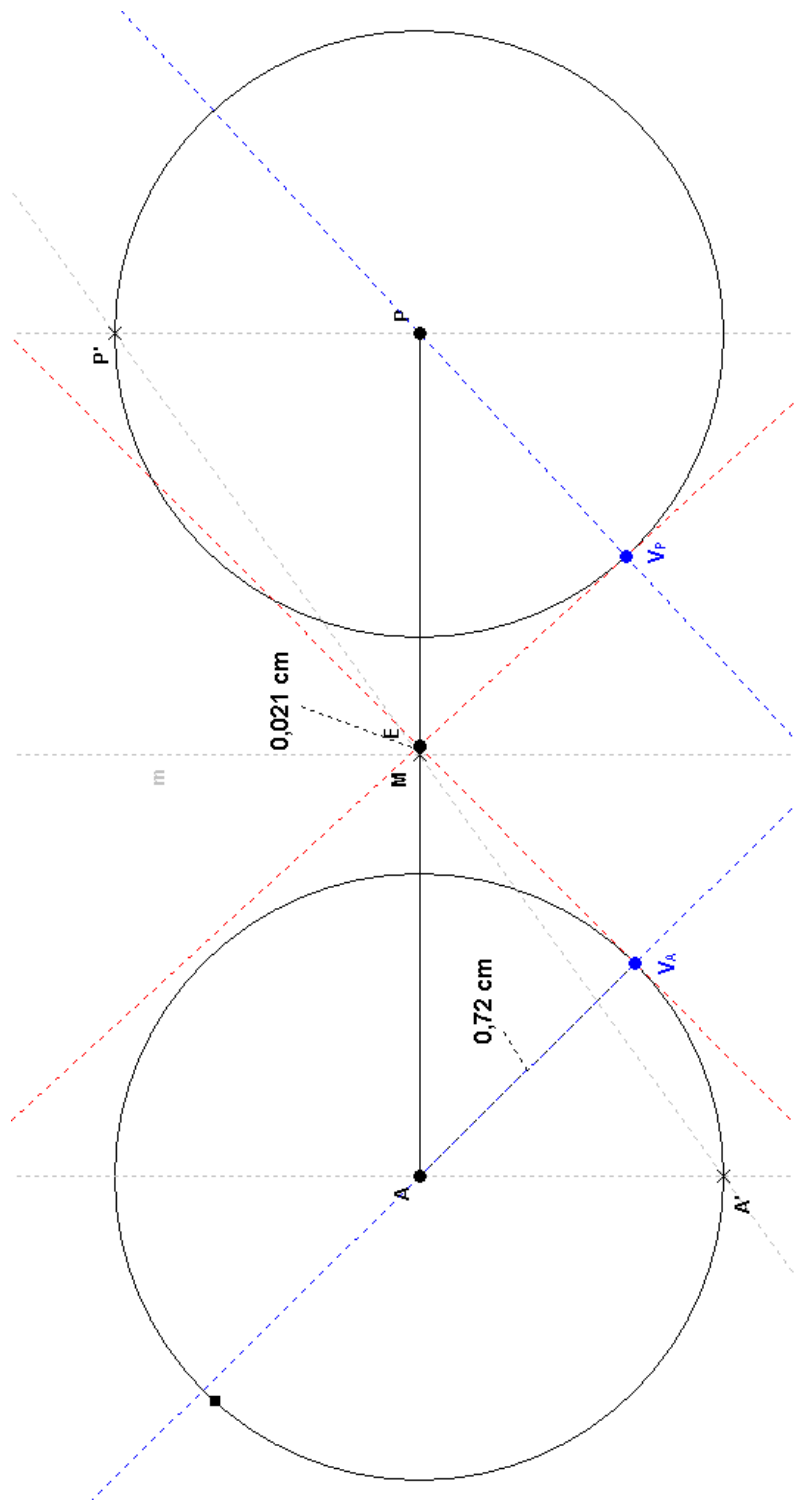
$$|ME| = 0,021 \text{ cm} = 0;1,15,36 \text{ (zuvor berechnet: } 0;1,15)$$

Die geringe Abweichung ist teils durch Rundungsfehler bei der Konvertierung der Winkelgrößen, teils durch die Messungenauigkeit von DynaGeo zu erklären. Die Ungenauigkeiten sind jedoch so gering, dass man das Ergebnis als völlig befriedigend bewerten kann.

Wenn den Schülerinnen und Schülern Ptolemäus Weg zur Ermittlung der Größen zumindest in den Grundzügen bekannt ist, wird dies meiner Ansicht nach die wohl meistgewählte Konstruktion sein, da sie die von Ptolemäus aufgestellten algebraischen Terme unmittelbar geometrisch umsetzt. Das geometrische Angleichen der Größe der Epizykelradien kommt dabei dem algebraischen Gleichsetzen der Terme gleich, wie es im vorigen Kapitel ausgeführt wurde.

Andererseits mag es sonderbar wirken, dass gerade die Größe der Epizykelradien angeglichen werden müssen, handelt es sich doch tatsächlich um ein und das gleiche Epizykel und dessen konstante Größe um eine der grundlegenden Eigenschaften des Modells. Daher sei an dieser Stelle als eine mögliche Alternative eine Konstruktion vorgestellt, die die konstante Größe des Epizykelradius als Startbedingung einsetzt und im Gegenzug die Position der Erde völlig frei lässt (siehe CD: ModellB.geo).

1. Man konstruiere wie zuvor die Strecke d mit einer Länge von 2 cm und den Endpunkten A und P und man bestimme ebenso durch Konstruktion einer Mittelsenkrechten m den Mittelpunkt M der Strecke.
2. Nun zeichne man o.B.d.A. einen Kreis mit freiem Radius um den Endpunkt A der Strecke d . Da feststeht, dass der Epizykelradius konstant ist, muss nun ein gleich großer Kreis um den anderen Endpunkt P der Strecke konstruiert werden.
3. Dazu konstruiere man zunächst jeweils eine Parallele (im Folgenden p_A und p_P genannt) zur eben konstruierten Mittelsenkrechten durch die Endpunkte A und P der Strecke d .
4. Nun lege man eine Gerade durch den Schnittpunkt von p_A mit dem Epizykel um A (im Folgenden A' genannt) und den Punkt M . Durch den Schnitt dieser Geraden mit der Parallelen p_P (im Folgenden P' genannt) entstehen so zwei kongruente Dreiecke. Somit ist $|AA'| = |PP'|$ und wir können einen gleich großen Epizykel um P durch P' ziehen.



6. Nun wollen wir die jeweilige Position der tatsächlichen Venus auf dem Epizykel im Apo- resp. Perigäum bestimmen. Wir wissen, dass der Winkel zwischen mittlerer Venus und Erde gemessen in der tatsächlichen Venus bei maximaler Elongation 90° beträgt und wir kennen ebenso den Winkel zwischen mittlerer und tatsächlicher Venus gemessen in der Erde. Somit können wir auch den Winkel zwischen Erde und tatsächlicher Venus gemessen in der mittleren Venus als die noch fehlende Differenz zur Innenwinkelsumme im Dreieck von 180° bestimmen:

$$\beta_A = 180^\circ - 90^\circ - 44;48^\circ = 45;12^\circ = 45,200^\circ$$

$$\beta_P = 180^\circ - 90^\circ - 47;20^\circ = 42;40^\circ \approx 42,667^\circ$$

Diese Winkel tragen wir in A und P an und erhalten als Schnittpunkt mit dem jeweilig umgebenen Epizykel die tatsächlichen Venuspositionen (im Folgenden V_A und V_P genannt) .

7. Nun konstruieren wir aus dem oben genannten Grund zu den eben bestimmten Schenkeln je eine Orthogonale durch den Punkt V_A resp. V_P .
8. Bedingt durch den Konstruktionsweg muss die Erde E nun im Schnittpunkt dieser beiden Orthogonalen liegen.
9. Im Regelfall sollte dieser Schnittpunkt außerhalb der Strecke d liegen. Das ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache, dass die Erde bei unserer Betrachtung auf einer Linie mit den mittleren Venuspositionen und dem Mittelpunkt der Umlaufbahn liegt. Man ändere daher nun den Radius des Epizykels eben so, dass die Erde auf der Strecke d zu liegen kommt.
10. Nun messe man wieder den Abstand zwischen M und E, sowie den Radius des Epizykels r_e .

Bei diesem Vorgehen erhalte ich in meiner Beispielkonstruktion die gleichen Werte für $|ME|$ und r_e . Somit ist hier die gleiche Genauigkeit zu erwarten. Die Konstruktion ist zwar insgesamt als komplexer zu bewerten, bietet aber gerade durch die Anfangskonstruktion der gleich großen Kreise (wie hier über die kongruenten Dreiecke) für die Mittelstufe einen interessanten Abstecher.

Animiertes Venusmodell

Während Ptolemäus sein vollständiges Venusmodell mit dem Testen aktueller Beobachtungen beschließt, möchte ich die Möglichkeiten von DynaGeo im Bereich der Animation nutzen und aus den zuvor ermittelten Daten eine für die Schülerinnen und Schüler anschauliche Animation des Modells erzeugen, die den Schülern eine Rückmeldung geben soll, ob ihre ermittelten Werte die gesuchte Schleifenbahn der Venus erzeugen. Dabei muss man sich insbesondere über die beschränkten Animationsfähigkeiten von DynaGeo bewusst werden. Das Programm kann jeweils nur ein freies Objekt gleichzeitig animieren. Alle weiteren Bewegungen müssen demnach durch konstruierte Zusammenhänge erfolgen.

Während wir die Größen für den Epizykelradius und die Exzentrizität der Erde als konstante Längen in das Modell übertragen können, haben wir mit der mittleren Bahngeschwindigkeit und der Epizykel-Bahngeschwindigkeit zwei von einander unabhängige Größen, die DynaGeo daher nicht gleichzeitig animieren kann. Um das Venusmodell trotzdem zu bewerkstelligen, muss ich mich eines kleinen Kniffs bedienen. Dazu verzichte ich zunächst auf die absoluten Bahngeschwindigkeiten zu Gunsten einer Relation der beiden. Dies ist in mehrfacher Hinsicht als nicht besonders tragisch zu bewerten:

1. Bei den Längen musste schon Ptolemäus in Ermangelung messbarer Werte selbst auf Relationen zurückgreifen.
2. DynaGeo ist gewiss nicht dafür konzipiert um exakte, astronomische Modelle zu animieren; dafür fehlt es allein schon an Kalibrierungsmöglichkeiten.
3. Und letztlich ist die Animationsgeschwindigkeit sowieso hauptsächlich von der Leistung des verwendeten Rechners abhängig.

Mir geht es bei dem Animationsmodell wie oben erwähnt vor allem um die visuelle Rückmeldung an die Schüler, die sich durch Beschränkung auf die Relation der beiden Geschwindigkeiten nicht verändert und weiterhin die gesuchte Schleifenbahn ergibt. Als Relation der beiden Bahngeschwindigkeiten erhalten wir:

$$\frac{0;36,59,25,53,11,28^{\circ}/d}{0;59,8,17,13,12,31^{\circ}/d} \approx 0,62549$$

Diese Relation wird über ein sog. Termobjekt auf DynaGeo übertragen, das mit „0,62549 * x“ belegt wird, wobei x die mittlere Bahngeschwindigkeit darstellt. Leider

gibt es weder eine Möglichkeit, die Animationsgeschwindigkeit eines Objektes abzufragen, um sie als Variable in einem Termobjekt weiter zu verwenden, noch die Option, den Wert eines Termobjekts als Bewegungsgeschwindigkeit auf ein anderes Objekt zu übertragen. Daher greife ich in meiner Beispielkonstruktion auf die Konstruktion mittels Winkeln zurück, womit sich die Bahngeschwindigkeit aus der Änderungsrate der jeweiligen Winkelgrößen ergibt. Außerdem animiere ich nicht direkt den Ausgangswinkel, sondern binde diesen an ein sog. Zahlobjekt, welches ich schließlich animiere. Das hat den Vorteil, dass der Ausgangswinkel über 360° hinauslaufen kann. Andernfalls würde nur ein kleiner Teil der Venusbahn animiert, da das Modell nach einer vollständigen Rotation der mittleren Venus auf der Umlaufbahn in den Ursprungszustand zurückfallen würde, obwohl die tatsächliche Venus auf dem Epizykel aufgrund der nur gut halb so großen Bahngeschwindigkeit nicht mal eine Umdrehung absolviert hätte und somit nicht nahtlos anschließen würde, sondern beim Übergang von 360° zu 0° einen plötzlichen Sprung vollziehen würde.

Bei der nun folgenden Konstruktion des Venusmodells kann man sich dazu entschließen, die Exzentrizität der Erde unberücksichtigt zu lassen. Die Form der Venusbahn in der dargestellten Aufsicht ändert sich dadurch nicht. Allenfalls der Beobachtungsstrahl von der Erde zur tatsächlichen Venus verhält sich anders. Durch die bei der Venus mit $0;1,15$ ($\approx 0,021$ cm in unserem Modell) extrem geringe Exzentrizität sollte dieser Unterschied selbst für ein geübtes Auge kaum wahrnehmbar sein. Schon die Konstruktionspunkte von Erde und Mittelpunkt der Umlaufbahn lassen sich bei vollständiger Betrachtung des Modells auf einem herkömmlichen Computerbildschirm kaum differenzieren. In meiner Beispielkonstruktion habe ich die Exzentrizität der Vollständigkeit halber eingefügt, und ich verwende die Strecke zwischen Erde und Mittelpunkt gleichzeitig als Schenkel für die Winkelkonstruktion. Andernfalls müsste man einen solchen Schenkel durch Hinzufügen eines beliebig positionierten, freien Punktes erschaffen. Die Konstruktion wäre nun also wie folgt durchzuführen (siehe CD: VenusAnimation.geo):

1. Man nehme einen freien Punkt M und ziehe um diesen einen Kreis mit dem Radius 1 cm, welcher somit die Umlaufbahn der mittleren Venus repräsentiert.
2. Man zeichne eine Strecke der Länge 0,021 cm an den Punkt M in eine beliebige Richtung. Im Endpunkt der Strecke liegt somit die Erde E.

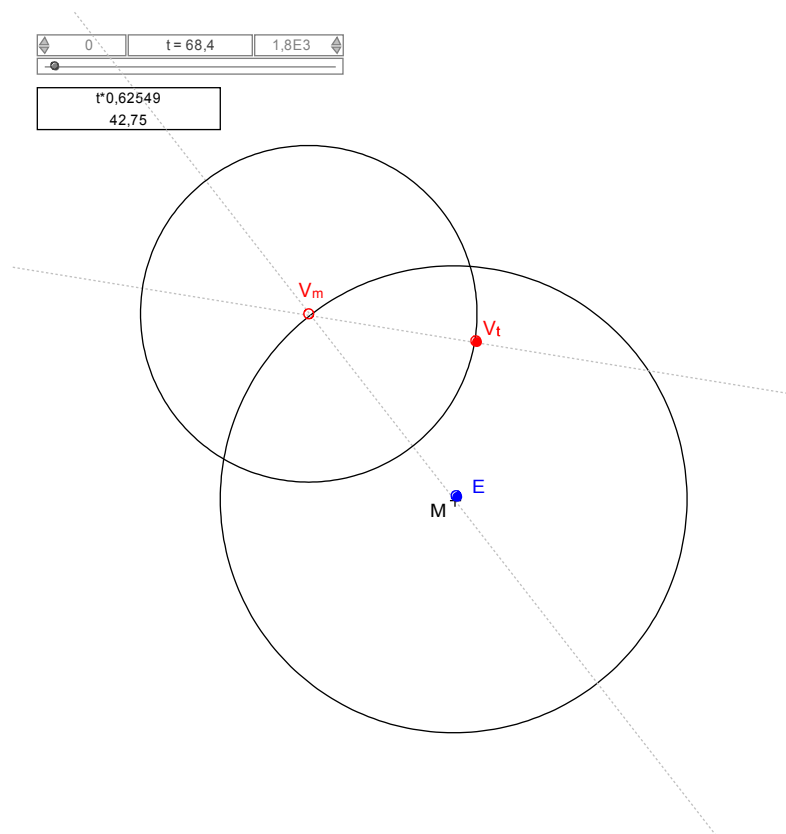


Abbildung 13: Animierbares Modell der Venus (siehe CD: *Venusanimation.geo*)

3. Wir erstellen nun ein Zahlobjekt t (der Zahlbereich sollte zwischen 0 und einem Vielfachen von 360 eingestellt werden) und konstruieren anschließend einen Winkel an die Strecke ME in M mit der Größe t .
4. Der Schnittpunkt zwischen dem soeben eingezeichneten freien Schenkeln und dem Kreis der Umlaufbahn stellt die Position der mittleren Venus V_m dar.
5. Man erstelle nun das zuvor beschriebene Termobjekt s und belege es mit dem Term „ $0,62549 * t$ “. Anschließend konstruieren wir einen weiteren Winkel, diesmal an die Gerade MV_m ²¹ in V_m , mit der Größe s .

²¹ Da eine genaue zeitliche Kalibrierung des Modells nicht vorgesehen ist, kann der Winkel auch an einen beliebigen anderen Schenkel angetragen werden. Die Startausrichtung des Modells spielt keine Rolle.

6. Dann zeichne man einen Kreis um V_m mit dem zuvor ermittelten Radius 0,72 cm (siehe geometrische Bestimmung der Größe des Epizykelradius), welcher den Epizykel darstellt. Der Schnittpunkt zwischen dem in Schritt 5 konstruierten freien Schenkel und dem Epizykel kennzeichnet die tatsächliche Venus V_t .
7. Nach Bedarf kann nun noch ein Strahl von E nach V_t eingezeichnet werden, der die irdische Beobachtung der Venus verdeutlicht.

Dieses Modell kann nun animiert werden, indem wir das Zahlobjekt t als zu animierendes Objekt festlegen. Je nach Rechnerleistung muss die Animationsgeschwindigkeit durch die Erhöhung der Schrittweite angepasst werden. In dieser Form fährt die tatsächliche Venus zwar schon die gesuchte Schleifenbahn ab, hinterlässt dabei aber keinen bleibenden Eindruck, sodass wir kein Gesamtbild der Bahnform erhalten.

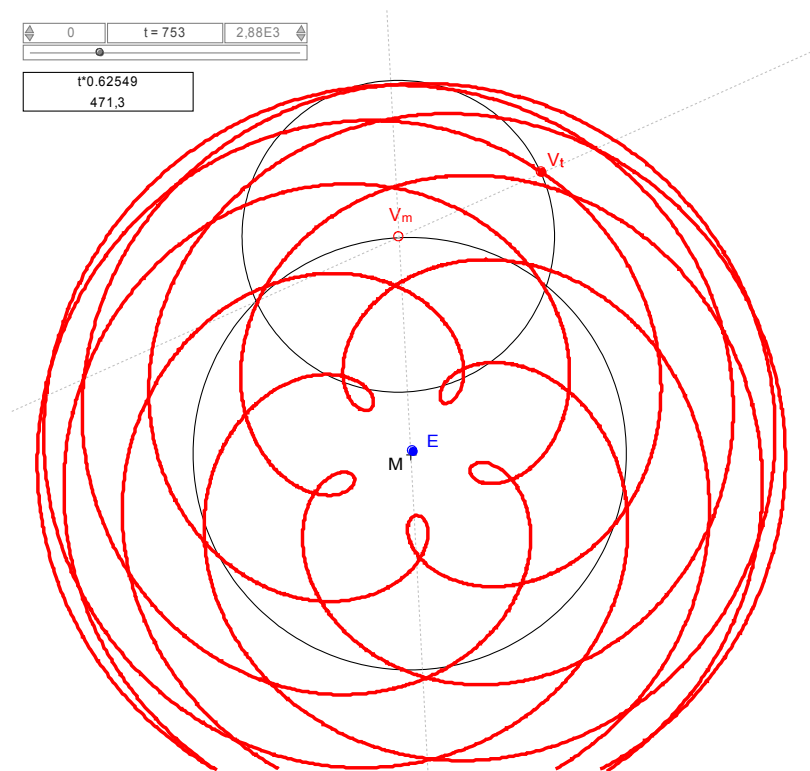


Abbildung 14: Ortskurve der Venus zur Veranschaulichung der Bahn

DynaGeo besitzt jedoch die Fähigkeit die Ortskurve eines beliebigen Punktes in Abhängigkeit der Bewegungsmöglichkeiten eines freien Objekts zu bestimmen. Dazu wähle man das Werkzeug „Ortslinie aufzeichnen“ aus und wähle im Modell die tatsächlich Venus als aufzuzeichnendes Objekt aus. Direkt im Anschluss verändere man den Wert des Zahlobjekts. Der Betrag der Änderung ist dabei unwesentlich, da die Software automatisch den gesamten möglichen Bewegungsspielraum des Objekts in die Bestimmung der Ortskurve mit einbezieht. DynaGeo berechnet nun einige Punkte der Venusbahn und extrapoliert daraus eine gleichmäßige Ortskurve, die den Schülern und Schülerinnen im Falle der korrekt bestimmten Werte die gesuchte Bahnform wiedergibt (siehe Abbildung 14).

Vergleich mit modernen Venusbeobachtungen

Zum Abschluss dieses Kapitels habe ich den Selbstversuch unternommen, das soeben dargestellte ptolemäische Venusmodell mit Hilfe von aktuellen Venusbeobachtungen nachzuvollziehen. Insbesondere interessierte mich dabei, ob die heutigen, wesentlich präziseren Beobachtungen im Vergleich zur Technik zu Ptolemäus Zeiten noch ein genaueres Venusmodell liefern würden. Außerdem musste Ptolemäus am Ende seiner Betrachtungen zum Venusmodell eingestehen, dass die zunächst als konstant erachtete Position der Apsidenlinie bei Betrachtung langer Zeiträume eine leichte Verschiebung erfährt. Im Vergleich zweier Beobachtungen mit einem Abstand von 408 Jahren ermittelt er eine Abweichung von $4;5^\circ$, also etwa 1° pro 100 Jahren²². Würde man dieser Theorie folgen, müsste die Apsidenlinie heute um etwa 19° von Ptolemäus Werten abweichen.

Wie ich in einem Gespräch mit Herrn Metz von der Sternwarte Essen erfahren habe, ist jedoch die Wahrscheinlichkeit heutzutage eine durchgehende Beobachtungsreihe der Venus zu finden, wie sie für die Konstruktion von Ptolemäus Modell nötig wäre, äußerst gering. Die Venusbahn ist mittlerweile theoretisch derart präzise bestimmt, dass jegliche Erdbeobachtungen bspw. durch Störungen der Erdatmosphäre schlechtere Werte liefern würden als das theoretische Modell. Außerdem ist es dadurch natürlich uninteressant geworden, den Lauf der Venus zu verfolgen. Herr Metz empfahl mir für meine Zwecke die Astronomie-Software „SkyMap Pro“, welche die von der Erde aus gesehene Position der Himmelsobjekte zu jeder beliebigen Zeit mit hoher Genauigkeit auf einer virtuellen Himmelkugel darstellen kann.

²² Manitius, 2. Band, S. 167, Z. 19 ff.

Zunächst müssen für Ptolemäus Modell Paare gleicher, maximaler Elongation gefunden werden. SkyMap bietet dafür die praktische Möglichkeit automatisch nach maximalen Elongationen in einem bestimmten Zeitraum zu suchen. Die maximalen Elongationen der letzten 100 Jahre sind in der Tabelle auf Seite 59 dargestellt. Hierbei handelt es sich allerdings um Elongationen von der tatsächlichen Sonne und nicht um solche von der mittleren Sonne, die für Ptolemäus Modell erforderlich wären. Zwar beläuft sich die berechenbare Abweichung von tatsächlicher und mittlerer Sonne nur auf wenige Grad, doch verschiebt sich der Zeitpunkt der maximalen Elongation dadurch erheblich, weshalb meine Testberechnungen der Apsidenlinie mit diesen Elongationen teils über mehr als 60° verstreut lagen. Eine Möglichkeit die mittlere anstatt der tatsächlichen Sonne als Referenzobjekt zu wählen, bietet SkyMap jedoch leider nicht an, und eine manuelle Berechnung würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Um trotzdem noch halbwegs genaue Berechnungen durchzuführen, habe ich folgende Idee angestellt: Repräsentiert die mittlere Sonne die durchschnittliche Position der Sonne im Laufe eines Jahres, so muss die tatsächliche Sonne zweimal im Jahr mit der Position der mittleren Sonne übereinstimmen. Da sich in Wirklichkeit sogar zwei Störungen überlagern, erhalten wir jedes Jahr insgesamt 4 solcher Nullpunkte. Diese liegen in unserem Jahrtausend am:

- 15. April
- 13. Juni
- 1. September
- 25. Dezember

Mein Ziel war es daher maximale Elongationen zu finden, die zeitlich besonders nah an diesen Daten liegen, um den Fehler durch die Abweichung von mittlerer und tatsächlicher Sonne zu minimieren. Als bestes Elongationspaar der letzten 100 Jahre ergab sich:

Virtuelle Beobachtung I

Zeitpunkt	12. April 1956, 18:44 Uhr (3 Tage Abweichung)
Elongation der Venus von der Sonne	45;47,35° (nach Osten)
Position der tatsächlichen Sonne	22;49,42,24°

Virtuelle Beobachtung II

Zeitpunkt	15. Juni 1977, 7:22 Uhr (2 Tage Abweichung)
Elongation der Venus von der Sonne	45;47,45° (nach Westen)
Position der tatsächlichen Sonne	84;4,52,0°

Bestimmt man mit Hilfe des ptolemäischen Modells die Winkelhalbierende zwischen den Positionen der Sonne, so erhält man daraus eine Apsidenlinie bei 53;27,17,12°. Um die Genauigkeit der Berechnungen zu prüfen, wählte ich ein weiteres geeignetes Elongationspaar mit folgenden Daten:

Virtuelle Beobachtung III

Zeitpunkt	10. April 1964, 9:10 Uhr (5 Tage Abweichung)
Elongation der Venus von der Sonne	45;49,38° (nach Osten)
Position der tatsächlichen Sonne	20;32,9,48°

Virtuelle Beobachtung IV

Zeitpunkt	10. Juni 1993, 12:53 Uhr (3 Tage Abweichung)
Elongation der Venus von der Sonne	45;49,19° (nach Westen)
Position der tatsächlichen Sonne	79; 39,0,6°

Die Berechnung der Apsidenlinie ergibt hierbei einen Winkel von 50;5,34,57°. Man sieht hier deutlich, dass die Berechnungen trotz der hohen Präzision der Werte durch die Abweichungen von mittlerer und tatsächlicher Sonne ungenauere Ergebnisse liefern, als sie Ptolemäus bestimmen kann. Andererseits hat es jedoch den Anschein, als wäre die Apsidenlinie zumindest nicht in dem Maße gewandert, wie es Ptolemäus vor knapp 1900 Jahren voraussagte.

Noch gravierender wird das Problem, wenn man nun nach maximalen Elongationen auf der Apsidenlinie sucht. Nach Ptolemäus Modell erreicht die Venus ihr Apogäum bei 55°, womit wir eine Beobachtung von Mitte Mai bräuchten²³. Ptolemäus muss bei seinen Beobachtungen wie zuvor erwähnt einen Fehler von 0;2° hinnehmen. Wenn man sich dagegen die Tabelle der maximalen Elongationen der letzten 100 Jahre ansieht, so taucht darin nicht ein einziges Mal eine Beobachtung zu irgendeiner Zeit

²³ Dies folgt daraus, dass mittlere Venus- und mittlere Sonnenposition übereinstimmen.

im Mai auf. Laut Kalkulation von SkyMap ist damit erst wieder in gut 60 Jahren zu rechnen. Da zudem im Mai mittlere und tatsächliche Sonne sehr stark von einander abweichen, ist nicht mal ansatzweise daran zu denken, dass mit dieser Methode bessere Ergebnisse als die von Ptolemäus zu bestimmen wären.

Ich belasse es daher bei der Erkenntnis wie viel Zeit Ptolemäus damit verbracht haben muss aus einer vermutlich enormen Anzahl an Beobachtungsdaten, die er uns demnach größtenteils vorenthält, geeignete Elongationspaare zu ermitteln und wie viel Glück er auf der anderen Seite hatte, überhaupt die nötigen Beobachtungen für sein Modell innerhalb seiner Lebenszeit zusammentragen zu können, wenn man bedenkt, dass Ptolemäus nur Elongationen beobachten konnte, die kurz vor Sonnenaufgang oder kurz nach Sonnenuntergang stattfanden, während die rechnerische Tabelle auf Seite 59 noch eine Vielzahl von maximalen Elongationen am helllichten Tag beinhaltet.

Didaktische Schlussbetrachtungen

In dieser Arbeit wollte ich zwei wesentliche Schritte vollziehen; zum einen galt es eine historische Thematik in einen modernen Kontext überführen und somit für den Mathematikunterricht zugänglich machen, zum anderen war mir wichtig aufzuzeigen, welche Möglichkeiten der Einsatz dynamischer Geometriesoftware bei der Aufbereitung der Thematik bietet.

Mit den Mitteln des klassischen Mathematikunterrichts könnten die Modelle in weiten Teilen erst mit Einführung der trigonometrischen Funktionen in der 10. Jahrgangsstufe näher betrachtet werden. Und selbst dann wäre die Bestimmung der geeigneten Parameter der Modelle für die Lernenden ein eher inaktiver Prozess. Besonders tragisch empfinde ich es aber, dass die Schüler und Schülerinnen nach der vollständigen Berechnung ihres Modell, abgesehen vielleicht von der Bestätigung durch den Lehrer, keine Rückmeldung darüber erhalten würden, ob die von ihnen ermittelten Werte die gewünschte Planetenbewegung erzeugen können.

Demgegenüber kann mit dem Einsatz von dynamischer Geometriesoftware das Thema mathematik-didaktisch so vereinfacht werden, dass sich auch schon Schüler und Schülerinnen mit Einführung von geometrischen Konstruktionen in Jahrgangsstufe 7 oder 8 an die Thematik wagen können. Durch die hier vorgestellten Konstruktionen können natürlich keine exakten Werte „errechnet“ werden, doch wie in meinen Beispielen aufgezeigt, reicht die Genauigkeit allemal aus, um ein funktionierendes Modell daraus entwickeln zu können. Die dynamische Geometriesoftware ist nicht nur ein Mittel zur computergestützten Konstruktion als Alternative zu Papier und Bleistift, sondern lädt darüber hinaus durch ihre Möglichkeit zur direkten Manipulation der Konstruktionen zum selbständigen Experimentieren mit den Modellen ein. Die Möglichkeit der Animation liefert in diesem Fall eine optimale Rückmeldung für den Lernenden.

Zugegebenermaßen halte ich die hier vorgestellte Erarbeitung des Venusmodells ungeeignet, um sie in einer einzelnen Unterrichtsstunde abzuhandeln. Gerade wenn man an den Einsatz in der 7. oder 8. Jahrgangsstufe denkt, dürfte die Aufbereitung

des historischen Themas aufgrund des zu vermittelnden, doch recht umfangreichen und komplexen Hintergrundwissens einige Zeit beanspruchen. Besser wäre meiner Meinung nach die Einbettung der Modelle in eine Themenreihe, die sinnvoll sogar interdisziplinär mit den Fächern Physik oder Geschichte kombiniert werden könnte.

Literaturverzeichnis

- Aaboe, Asger: *Episodes from the early history of mathematics*. Mathematical Association of America, Washington, D.C. (USA) 1964, Seiten 101-127.
- Ekschmitt, Werner: *Weltmodelle – Griechische Weltbilder von Thales bis Ptolemäus*. Verlag Philipp von Zabern, Mainz 1989. ISBN 3-8053-1092-7
- Gillispie, Charles Coulston [Hrsg.]: *Dictionary of scientific biography (Band 11)*. Scribner, New York (USA) 1981, Seiten 186-206. ISBN 0-684-16962-2
- Manitius, Karl: *Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie*. Teubner, Leipzig 1912.
- Pedersen, Olaf: *A Survey of the Almagest*. Odense University Press, Odense (Dänemark) 1974. ISBN 87-7492-087-1
- Pedersen, Olaf: *Early Physics and Astronomy – A Historical Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge (GB) 1993, Seiten 1-89. ISBN 0-521-40899-7
- Wolf, Rudolf: *Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Literatur (Band 1)*. OLMS, Hildesheim 1973, Seiten 525-533.

Anhang

Sollten Sie diesen Text lesen können,
so fehlt an dieser Stelle die CD.

Inhaltsverzeichnis der CD

- /Ausarbeitung.pdf
Diese Arbeit in elektronischer Form (PDF-A1)
- /Konstruktionen/Apogäumsbestimmung.geo
Konstruktion zur Bestimmung des Apogäums der Venus
- /Konstruktionen/Chord.geo
Konstruktionsskizze für den Zusammenhang zwischen Chord- und Sinusfunktion
- /Konstruktionen/Epizykelmodell.geo
Konstruktionsskizze des Epizykelmodells
- /Konstruktionen/Exzentermodell.geo
Konstruktionsskizze des Exzentermodells
- /Konstruktionen/ModellA.geo
1. Konstruktionsvariante für die Bestimmung der Parameter im Venusmodell
- /Konstruktionen/Modelläquivalenz.geo
Modell zur Veranschaulichung der Äquivalenz zwischen Epizykel- und Exzentermodell
- /Konstruktionen/ModellB.geo
2. Konstruktionsvariante für die Bestimmung der Parameter im Venusmodell
- /Konstruktionen/Planetendifferenzierung.geo
Modell zur Veranschaulichung der unterschiedlichen Beobachtungen von inneren und äußeren Planeten
- /Konstruktionen/Venusanimation.geo
Fertig animierbares Modell der Venus
- /Weblinks/DynaGeo.url
*Weblink zum Anbieter der Software „Euklid DynaGeo“
Download einer kostenlosen Shareware-Version möglich*
- /Weblinks/SkyMap.url
*Weblink zum Anbieter von der Software „SkyMap Pro“;
Download einer kostenlosen Demo-Version möglich*

Tabelle: Maximale Venuselungenen der letzten 100 Jahre

Datum	Uhrzeit	Elongation	Datum	Uhrzeit	Elongation
1999 Jun 11 11:54:00	45° 23' 18" Ost	1938 Sep 11 01:52:00	46° 19' 25" Ost		
1991 Jun 13 21:50:00	45° 23' 25" Ost	1950 Apr 11 09:29:00	46° 20' 47" West		
2007 Jun 9 02:45:00	45° 23' 27" Ost	1930 Sep 13 11:49:00	46° 21' 51" Ost		
1983 Jun 16 07:14:00	45° 23' 33" Ost	1958 Apr 8 23:02:00	46° 22' 26" West		
1975 Jun 18 16:07:00	45° 23' 52" Ost	1966 Apr 6 13:17:00	46° 24' 02" West		
1967 Jun 21 00:05:00	45° 24' 17" Ost	1922 Sep 15 22:27:00	46° 24' 22" Ost		
1959 Jun 23 07:49:00	45° 24' 39" Ost	1974 Apr 4 03:48:00	46° 25' 46" West		
1951 Jun 25 16:07:00	45° 25' 02" Ost	1914 Sep 18 10:00:00	46° 26' 43" Ost		
1943 Jun 28 01:24:00	45° 25' 41" Ost	1982 Apr 1 17:49:00	46° 27' 10" West		
1935 Jun 30 11:13:00	45° 26' 13" Ost	2007 Okt 28 15:05:00	46° 27' 59" West		
1927 Jul 2 21:32:00	45° 27' 02" Ost	1990 Mrz 30 06:40:00	46° 28' 40" West		
1919 Jul 5 07:08:00	45° 28' 05" Ost	1999 Okt 30 23:34:00	46° 29' 30" West		
1911 Jul 7 16:01:00	45° 29' 03" Ost	1998 Mrz 27 18:38:00	46° 30' 18" West		
1916 Apr 24 10:32:00	45° 38' 52" Ost	1991 Nov 2 09:07:00	46° 30' 56" West		
1924 Apr 22 02:58:00	45° 40' 30" Ost	2006 Mrz 25 06:44:00	46° 31' 49" West		
1932 Apr 19 19:45:00	45° 42' 14" Ost	1983 Nov 4 19:22:00	46° 32' 29" West		
1913 Jul 4 04:00:00	45° 43' 51" West	1975 Nov 7 05:45:00	46° 33' 57" West		
1940 Apr 17 12:21:00	45° 44' 05" Ost	1967 Nov 9 15:16:00	46° 35' 34" West		
1921 Jul 1 18:30:00	45° 44' 07" West	1959 Nov 12 00:01:00	46° 37' 09" West		
1929 Jun 29 09:44:00	45° 44' 39" West	1951 Nov 14 08:07:00	46° 38' 33" West		
1937 Jun 27 01:51:00	45° 45' 01" West	1943 Nov 16 16:35:00	46° 39' 52" West		
1945 Jun 24 18:16:00	45° 45' 30" West	1935 Nov 19 01:41:00	46° 41' 17" West		
1948 Apr 15 04:00:00	45° 45' 42" Ost	1927 Nov 21 11:45:00	46° 42' 23" West		
1953 Jun 22 10:38:00	45° 46' 01" West	1913 Feb 12 14:25:00	46° 43' 26" Ost		
1961 Jun 20 02:27:00	45° 46' 26" West	1919 Nov 23 22:16:00	46° 43' 42" West		
1969 Jun 17 17:06:00	45° 46' 57" West	1911 Nov 26 08:33:00	46° 45' 05" West		
1956 Apr 12 18:44:00	45° 47' 35" Ost	1921 Feb 10 04:28:00	46° 45' 41" Ost		
1977 Jun 15 07:22:00	45° 47' 45" West	1929 Feb 7 18:11:00	46° 47' 55" Ost		
1985 Jun 12 21:55:00	45° 48' 24" West	1937 Feb 5 08:15:00	46° 50' 14" Ost		
2004 Aug 17 18:31:00	45° 48' 58" West	1945 Feb 2 23:14:00	46° 52' 25" Ost		
1993 Jun 10 12:53:00	45° 49' 19" West	1915 Feb 6 17:24:00	46° 53' 54" West		
1964 Apr 10 09:10:00	45° 49' 38" Ost	1953 Jan 31 14:55:00	46° 54' 35" Ost		
1996 Aug 20 03:27:00	45° 49' 48" West	1923 Feb 4 07:25:00	46° 54' 38" West		
2001 Jun 8 04:41:00	45° 50' 18" West	1931 Feb 1 22:10:00	46° 55' 17" West		
1988 Aug 22 11:45:00	45° 50' 44" West	1939 Jan 30 12:43:00	46° 55' 51" West		
1972 Apr 8 00:07:00	45° 51' 37" Ost	1947 Jan 28 02:23:00	46° 56' 11" West		
1980 Aug 24 19:04:00	45° 51' 50" West	1955 Jan 25 15:06:00	46° 56' 36" West		
1972 Aug 27 02:15:00	45° 52' 41" West	1961 Jan 29 06:52:00	46° 56' 42" Ost		
1964 Aug 29 10:03:00	45° 53' 42" West	1963 Jan 23 03:33:00	46° 56' 54" West		
1980 Apr 5 15:44:00	45° 53' 47" Ost	1971 Jan 20 16:23:00	46° 57' 19" West		
1956 Aug 31 18:43:00	45° 54' 44" West	1979 Jan 18 06:19:00	46° 57' 34" West		
1948 Sep 3 04:09:00	45° 55' 44" West	2003 Jan 11 02:26:00	46° 57' 41" West		
1988 Apr 3 08:17:00	45° 56' 04" Ost	1987 Jan 15 20:58:00	46° 57' 45" West		
1940 Sep 5 13:52:00	45° 56' 55" West	1995 Jan 13 11:55:00	46° 57' 49" West		
1996 Apr 1 00:46:00	45° 58' 03" Ost	1969 Jan 26 22:18:00	46° 58' 31" Ost		
1932 Sep 7 22:34:00	45° 58' 20" West	1977 Jan 24 12:42:00	47° 00' 17" Ost		
1924 Sep 10 06:31:00	45° 59' 30" West	1985 Jan 22 02:29:00	47° 02' 12" Ost		
2004 Mrz 29 16:39:00	46° 00' 16" Ost	1993 Jan 19 16:06:00	47° 03' 49" Ost		
2002 Aug 22 13:18:00	46° 00' 16" Ost	2001 Jan 17 06:09:00	47° 05' 36" Ost		
1916 Sep 12 13:56:00	46° 00' 52" West	2005 Nov 3 19:33:00	47° 06' 10" Ost		
1908 Sep 14 21:27:00	46° 02' 11" West	1997 Nov 6 06:37:00	47° 07' 46" Ost		
1994 Aug 24 22:51:00	46° 02' 32" Ost	1989 Nov 8 16:49:00	47° 09' 19" Ost		
1986 Aug 27 08:51:00	46° 04' 43" Ost	1981 Nov 11 01:54:00	47° 10' 52" Ost		
1978 Aug 29 19:53:00	46° 07' 02" Ost	1973 Nov 13 10:43:00	47° 12' 04" Ost		
1970 Sep 1 07:37:00	46° 09' 25" Ost	1965 Nov 15 20:12:00	47° 13' 13" Ost		
1962 Sep 3 19:14:00	46° 11' 51" Ost	1957 Nov 18 06:35:00	47° 14' 14" Ost		
1910 Apr 23 15:02:00	46° 13' 03" West	1949 Nov 20 17:48:00	47° 15' 11" Ost		
1954 Sep 6 06:11:00	46° 14' 22" Ost	1941 Nov 23 04:54:00	47° 16' 05" Ost		
1918 Apr 21 05:41:00	46° 14' 31" West	1933 Nov 25 15:03:00	47° 16' 58" Ost		
1926 Apr 18 19:37:00	46° 16' 02" West	1925 Nov 28 00:18:00	47° 17' 44" Ost		
1946 Sep 8 16:24:00	46° 17' 01" Ost	1917 Nov 30 08:47:00	47° 18' 14" Ost		
1934 Apr 16 08:32:00	46° 17' 29" West	1909 Dez 2 17:36:00	47° 18' 32" Ost		
1942 Apr 13 20:54:00	46° 19' 05" West				

Ich versichere, dass ich die schriftliche Hausarbeit einschließlich evtl. beigefügter Zeichnungen, Kartenskizzen, Darstellungen u.ä.m. selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, habe ich in jedem einzelnen Fall unter genauer Angabe der Quelle deutlich als Entlehnung kenntlich gemacht.

Ich bin damit einverstanden, dass diese Hausarbeit nach Abschluss meiner Ersten Staatsprüfung wissenschaftlich interessierten Personen oder Institutionen zur Einsichtnahme zur Verfügung gestellt wird und dass zu diesem Zweck Ablichtungen dieser Hausarbeit hergestellt werden, sofern diese keine Korrektur- oder Bewertungsvermerke enthalten.

Duisburg, den 20.07.08